Matematik LTH
Helsingborg

Tentamensskrivning, FMSF40
Sannolikhetsteori och diskret matematik
2022-04-20 kl 8.00–13.00

- Hjälpmedel: Miniräknare och utdelad formelsamling.
- Lösningar ska vara försedda med **ordentliga motiveringar** och svaren förenklas maximalt.
- Skriv anonymkod (eller namn om du saknar kod) på varje papper.
- På omslaget måste du skriva med bläck.
- Skriv endast på ena sidan av pappret. Flera lösningar på samma blad är dock ok.

---

1. a) Två händelser A och B har sannolikheterna $P(A) = 0.6$ och $P(B) = 0.7$. Kan händelserna vara disjunkta? (0.3)

b) Två disjunkta händelser C och D har sannolikheterna $P(C) = 0.2$ och $P(D) = 0.7$. Kan händelserna vara oberoende? (0.3)

2. Avgör om påståendet $\Big(\neg\big((p \wedge q) \to r\big)\Big) \leftrightarrow \big(p \to (q \to r)\big)$ är en tautologi, en kontradiktion eller ingendera. (0.6)

3. En stokastisk variabel ξ har frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4}, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Bestäm möjliga värden på konstanten a och beräkna väntevärdet och variansen för ξ. (0.6)

4. a) Hur många injektiva funktioner $f\colon \{1, 2, \ldots, 4\} \to \{1, 2, \ldots, 6\}$ finns det? (0.3)

b) Hur många surjektiva funktioner $g\colon \{1, 2, \ldots, 6\} \to \{1, 2, \ldots, 4\}$ finns det? (0.3)

5. Man har bestämt höjden h hos en cirkulär kon till 20 cm och basdiametern d till 10 cm och med hjälp härav beräknat volymen V. Dessa bestämningar kan betraktas som observationer på oberoende stokastiska variablar båda med standardavvikelsen 0.2 cm. Härled en approximation för standardavvikelsen hos V. (0.6)

6. Bevisa att $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1 \quad$ för $n \geq 1$. (0.6)

VAR GOD VÄND!

7. Antallet sönderfall per tima från två oberoende radioaktiva preparat betecknas ξ_1 och ξ_2 respektiva. Det antas att ξ_1 och ξ_2 är Poissonfördelade med väntevärden 1 och 2 respektiva. Beräkna sannolikheten för att det totala antal sönderfall på en tima är minnst 3. (0.6)

8. a) Talföljden (a_n) definieras genom $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ för $n \geq 2$, där $a_0 = 1$, $a_1 = 5$. Bestäm en explicit formel för a_n. (0.4)

b) Bevisa att $5 \mid a_n$ om $n \equiv 1 \pmod 5$. (0.2)

9. En matematiker kaster en symmetrisk tärning 50 gångar. Vad är *approximativa* sannolikheten för att produkten av de 50 utfall överstiger 10^{25}? (0.6)

10. Visa att det finns minnst 90 sätt att välja 6 olika tal från 1 till 15 så att alla 90 val har samma summa. (0.6)

SLUT!