LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
SANNOLIKHETSTEORI OCH DISKRET MATEMATIK
2020-04-15

1. U är reflexiv, U och V är symmetriska, U är transitiv och S är antisymmetrisk.

2. a) $P(högst\ 2def.) = P(\xi \le 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2)$.

Alt: $P(högst\ 2def.) = 1 - P(\xi = 3) = 1 - \dfrac{\binom{3}{3}\cdot\binom{12}{0}}{\binom{15}{3}} = 0,9912$.

b) $P(\min st\ 1\ anrop) = P(\xi \ge 1) = 1 - P(\xi = 0) = 0,982$.

3. Alt.1 Endast A: $|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 90 - 11 - 29 + 3 = 53$ element.

Endast B: $|B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 28$ element.

Endast C: $|C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 14$ element.

Antalet element som endast i mängden A **eller** endast i B **eller** endast i C är 53+28+14 = 95.

Alt.2 Antalet element som endast i mängden A **eller** endast i B **eller** endast i $C = |A| + |B| + |C| - 2\,|A \cap B| - 2|A \cap C| - 2|B \cap C| + 3|A \cap B \cap C| = 95$.

4. a) ξ = antalet lyckade försök. $\xi \in Bin(10, 0.8)$: $P(\xi > 7) = 1 - P(\xi \le 7) = 0,678$.

b) $\eta \in Exp(\lambda)$, där $\lambda = 1$. Vi har

$P(\xi < a) = 0,5 \iff \int_0^a 1\cdot e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^a = -e^{-a} + e^0 = 1 - \dfrac{1}{e^a} = 0,5$. Vi löser ut a:

$$1 - \frac{1}{e^a} = 0,5 \Leftrightarrow \frac{1}{e^a} = 0,5 \Leftrightarrow e^a = 2 \Leftrightarrow a = \ln 2 = 0,69.$$

5. a) Antalet funktioner är $5^6 = 15625$. Det finns inga injektiva funktioner, ty $|A| > |B|$.

b) $S(6,5)\cdot 5! = 1800$.

6. a) För varje lampa finns möjligheterna tänd eller släkt, oberoende av varandra. Detta ger 2^5 varianter, där dock fallet med alla lampor släkta inte innebär någon signal. För varje återstående alternativ finns två möjligheter: fast eller blinkande sken. Det totala antalet möjliga signaler är $2(2^5 - 1) = 62$.

b) Nu finns för varje lampa tre möjligheter: släkt, blinkande och fast sken.
Alla lampor släkta ger ingen signal.
Antalet möjliga signaler är $3^5 - 1 = 242$.

7. Ingendera, enligt sanningstabellen.

8. a) Använd att $f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x - \dfrac{x^3}{4}, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

b) $E(3\xi + 1) = 3E(\xi) + 1$, där $E(\xi) = \int_0^2 x \cdot \left(x - 0.25x^3 \right) dx = \dfrac{16}{15}$.

Vi får $E(3\xi + 1) = 3\dfrac{16}{15} + 1 = \dfrac{16}{5} + 1 = 4,2$

9. *Bassteg* $n = 1$: $1 < \dfrac{9}{8}$. (Sant!)

Induktionssteg: Antag sant för $n = k$: $1 + 2 + 3 + ... + k < \dfrac{(2k+1)^2}{8}$.

Visa sant för $n = k + 1 : 1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) < \dfrac{(2k+3)^2}{8}$.

VL= $1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) < \dfrac{(2k+1)^2}{8} + k + 1 = \dfrac{(2k+1)^2 + 8k + 8}{8} = \dfrac{(2k)^2 + 12k + 9}{8} =$

$= \dfrac{(2k+3)^2}{8}$ = HL. D.v.s. VL < HL. Detta ger att påståendet är sant för alla $n \ge 0$.

10. Vi använder Gauss approximation.

$E(\eta) = E(2\xi_1 \cdot \xi_2^3 + 3\xi_3^2) \approx 2E(\xi_1) \cdot E(\xi_2)^3 + 3E(\xi_3)^2$,eftersom
$\xi_1 \in N(2,1), \xi_2 \in Exp(1/3)$ och $\xi_3 \in R(-1,1)$ så har vi att
$E(\xi_1) = 2,\ E(\xi_2) = \dfrac{1}{1/3} = 3, E(\xi_3) = \dfrac{-1+1}{2} = 0$.
Väntevärdet blir $E(\eta) \approx 2E(\xi_1) \cdot E(\xi_2)^3 + 3E(\xi_3)^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 0 = 108$.
För att bestämma variansen måste vi derivera först $\eta\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right) = 2\xi_1 \cdot \xi_2^3 + 3\xi_3^2$ med avseende på ξ_1, ξ_2 och ξ_3.

$$\frac{\partial\eta(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_1} = 2\cdot\xi_2^3,\ \frac{\partial\eta}{\partial\xi_2} = 2\xi_1\cdot 3\xi_2^2 = 6\xi_1\cdot\xi_2^2,\ \text{och}\ \frac{\partial\eta}{\partial\xi_3} = 3\cdot 2\xi_3 = 6\xi_3.$$

Vi ersätter alla ξ_i med motsvarande väntevärdena och får att variansen blir

$$V(\eta) = V(2\xi_1\cdot\xi_2^3 + 3\xi_3^2) \approx \left(2\cdot E(\xi_2)^3\right)^2\cdot V(\xi_1) + \left(6\cdot E(\xi_1)E(\xi_2)^2\right)^2\cdot V(\xi_2) + \left(6\cdot E(\xi_3)\right)^2\cdot V(\xi_3),$$

där $V(\xi_1) = 1^2 = 1, V(\xi_2) = 3^2 = 9, V(\xi_3) = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

$$V(\eta) \approx \left(2\cdot 3^3\right)^2\cdot 1 + \left(6\cdot 2\cdot 3^2\right)^2\cdot 9 + \left(6\cdot 0\right)^2\cdot\frac{1}{3} = 107892$$

SLUT!