LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
SANNOLIKHETSTEORI OCH DISKRET MATEMATIK
2018-08-23

1. a) Antalet ”ord” blir $\frac{19!}{3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}$.

b) $1\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 604800$ nummer.

2. a) $P(\text{ exakt ett fel}) = P\left(\left(A\cap B^c\right)\cup\left(A^c\cap B\right)\right) = 0{,}15\cdot 0{,}8 + 0{,}85\cdot 0{,}2 = 0{,}29$.

b) $P(\text{ minst ett fel}) = 1 - P(\text{inget fel}) = 1 - 0{,}85\cdot 0{,}8 = 0{,}32$.

3. a) Antalet element$= 9\cdot 6 = 54$, Antalet delmängder $= 2^{54}$.

b) $|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C| \Leftrightarrow$

$|A\cap C| = 9+8+6-3-5+2-15 = 2$.

4.

q	p	$\sim p\wedge q$	$q\Rightarrow p$	$(\sim p\wedge q)\vee(q\Rightarrow p)$
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

5. $\eta\in Bin(10, e^{-0{,}001\cdot 50})$, $P(\eta = 9) = \binom{12}{9}\cdot\left(e^{-0{,}05}\right)^9\cdot\left(1-e^{-0{,}05}\right)^3 = 0{,}0163$.

6.

$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,3),$
$(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}$

Relationen är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

7. Bassteg: $n = 4$ är sant. Antag att för $n = k$:

$4\cdot 3 + 5\cdot 4 + ... + k\cdot(k-1) = \frac{k^3-k}{3} - 8$ är sant. Visa att detta är sant för $n = k+1$.

VL$= 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + ... + k\cdot(k-1) + (k+1)\cdot k = \frac{k^3-k}{3} - 8 + (k+1)\cdot k = \frac{k^3 - k + 3(k+1)k}{3} - 8 =$

$= \frac{k^3+3k^2+2k}{3} - 8$.

HL$= \frac{(k+1)^3-(k+1)}{3} - 8 = \frac{(k+1)\cdot((k+1)^2-1)}{3} - 8 = \frac{(k+1)\cdot(k^2+2k)}{3} - 8 =$

$= \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{3} - 8$. Dvs VL=HL $\Rightarrow$ sant för alla heltal $n \geq 4$.

8. $V(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2$, där $E(\xi) = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)dx = 0.5$,

$E(\xi^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)dx = 0.3$. Variansen blir $V(\xi) = 0.05$.

9. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ har karakteristiska ekvationen

$x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2.$

Man får $a_n = u \cdot (-1)^n + v \cdot 2^n$. Vi bestämmer u och v med hjälp av villkoren.

$\begin{matrix} a_1 = 5 : u \cdot (-1)^1 + v \cdot 2^1 = 5 \\ a_2 = -2 : u \cdot (-1)^2 + v \cdot 2^2 = -2 \end{matrix}$. Vi får $\begin{cases} -u + 2v = 5 \\ u + 4v = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 \\ v = \frac{1}{2} \end{cases}$ som ger

den explicita formeln för $a_n = -4 \cdot (-1)^n + \frac{1}{2} 2^n = (-1)^{n+1} \cdot 4 + 2^{n-1}$

10. ξ_k = livslängden för komponenten k. $\xi_k \in Exp\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow E(\xi_k) = 2$ och $V(\xi_k) = 4$.

$\eta = \sum_{k=1}^{50} \xi_k$ (utrustningens livslängd), $\eta \in N(E(\eta), D(\eta))$, där

$E(\eta) = 50 \cdot 2 = 100,\ V(\eta) = 50 \cdot 4 = 200$.

$$P(\eta > 90) = 1 - P(\eta < 90) \approx 1 - \Phi\left(\frac{90 - 100}{\sqrt{200}}\right) = 1 - \Phi(-0.71) = 0.76.$$