LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
SANNOLIKHETSTEORI OCH DISKRET MATEMATIK
2017-10-21

1. a) $P(exakt\ 2\text{ v.}) = \dfrac{\binom{8}{2}\binom{7}{3}}{\binom{15}{5}} = 0,326$.

b) P (först 2 röda och sedan 3 vita)= $\dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{15}{2}} \cdot \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{13}{3}} = 0,12 \cdot 0,1958 = 0,039$.

c) $\xi =$ antal röda kulor. P (högst 4 röda)=

$$= P(\xi \le 4) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0.993$$

2. p = Tanja investerar i aktier, q = hon är rik, r = hon är lycklig.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore\ p \to q \end{array}$$

detta kan skrivas som $((p \to q) \wedge (q \to r)) \Rightarrow (p \to r)$

Med sanningsvärdestabellen kan du visa att detta är tautologi, dvs. argumentet är giltigt.

3. a) $\xi \in Exp(\lambda)$, där $E(\xi) = \dfrac{1}{\lambda} = 3 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{3}$, d.v.s. $\xi \in Exp\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

$$P(\xi > 4) = 1 - P(\xi \le 4) = 1 - \int_0^4 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} dx = 1 - \left[-e^{-\frac{1}{3}x} \right]_0^4 = e^{-\frac{4}{3}} = 0,264.$$

b) $P(A) = P$ (elementet tillverkas av maskin A) = 0.47, resp. $P(B) =$ 0.53.

D = defekt. Sannolikheten att man får ett element med defekt från maskinen A är $P(D|A) =$ 0.03 resp. $P(D|B) =$ 0.04.

Sannolikheten att det defekta byggelementet kommer från maskinen B är

$$P(B|D) = \frac{P(B) \cdot P(D|B)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D|B)}{P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B)} = \frac{0,53 \cdot 0,04}{0,0353} = 0.601$$

4. Relationen $aRb \Leftrightarrow b = a^2$ blir $R = \{ (1,1), (2,4), (3,9) \}$

$Dom(R) = \{1,2,3\}$, $Ran(R) = \{1,4,9\}$, relationen är icke funktion, ty inte till alla element från A tilldelas ngt element från B.

5. ξ = antal rätt på de frågor man inte kan. P (att svara rätt) = $\frac{1}{5} = 0.2$.

$\xi \in Bin(4, 0.2)$. $P(\xi \geq 2) = \sum_{k=2}^{4} \binom{4}{k} \cdot 0.2^k \cdot 0.8^{4-k} = 0.1808$.

6. $a_n = a_{n-1} + 3 = (a_{n-2} + 3) + 3 = a_{n-2} + 2 \cdot 3 = (a_{n-3} + 3) + 2 \cdot 3 = a_{n-3} + 3 \cdot 3 = ... = a_{n-k} + k \cdot 3$

Vi använder att $a_1 = 2$ och sätter $n - k = 1 \Leftrightarrow k = n - 1$. Vi får

$a_n = a_{n-k} + k \cdot 3 = a_1 + (n-1) \cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$.

7. Totala antalet TV- tittarna $|U| = 500$,

Fotboll: $|F| = 285$, Handboll: $|H| = 195$, Ishockey: $|I| = 115$.

Tittar på två program: $|F \cap I| = 45, |F \cap H| = 70, |H \cap I| = 50$.

Tittar inte på ngn sportprogram: $|F^c \cap H^c \cap I^c| = 50$

a) Antalet som tittar på alla tre program: $|F \cap H \cap I|$ kan fås ur

$|F \cup H \cup I| = |F| + |H| + |I| - |F \cap H| - |F \cap I| - |H \cap I| + |F \cap H \cap I|$,

Där $|F \cup H \cup I| = |U| - |F^c \cap H^c \cap I^c| = 500 - 50$. Vi får

$|F \cap H \cap I| = |F \cup H \cup I| - \left(|F| + |H| + |I| - |F \cap H| - |F \cap I| - |H \cap I|\right) = 20$.

b) Antalet som tittar på bara ett program (bara F eller bara H eller bara I)=

$|F| + |H| + |I| - 2|F \cap H| - 2|F \cap I| - 2|H \cap I| + 3|F \cap H \cap I|$=325.

8. $\int_{-\infty}^{\infty} k(1 - x^2)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} k(1 - x^2)dx = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$

$E(\xi) = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{3}{4}(1 - x^2)dx = 0 \Rightarrow E(3\xi - 2) = 3E(\xi) - 2 = -2$.

9. *Bassteg* $n = 1$: $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Leftrightarrow 1 = 1$. (Sant!)

Induktionssteg: Antag att det är sant för $n = k$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

Visa att det är sant för $n = k + 1$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

$$\text{VL}=1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+\frac{4(k+1)^3}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2\cdot\left(k^2+4(k+1)\right)}{4}=\frac{(k+1)^2\cdot\left(k^2+4k+4\right)}{4}=\frac{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}{4}=\text{HL}$$

Detta ger att påståendet är sant för alla $n\geq 1$.

10. $\xi_i =$ antal bilar per hushåll **i**. $E(\xi)=0\cdot 0.3+1\cdot 0.6+2\cdot 0.1=0.8$

$E(\xi^2)=0^2\cdot 0.3+1^2\cdot 0.6+2^2\cdot 0.1=1.0$.

$V(\xi)=E(\xi^2)-\left(E(\xi)\right)^2=1.0-0.8^2=0.36$.

$\eta =$ antal bilar för 1000 hushåll, dvs. $\eta=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{1000}$.

$\eta \underset{\sim}{\in} N\left(E(\eta),\sigma(\eta)\right)$, där $E(\eta)=1000\cdot 0.8=800$.

$V(\eta)=1000\cdot 0.36=360 \Rightarrow \sigma(\eta)=\sqrt{360}$.

$$P(\eta\leq x)=0.90 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x-800}{\sqrt{360}}\right)=0.90 \Leftrightarrow \frac{x-800}{\sqrt{360}}=1.28 \Leftrightarrow x=824.3.$$

Svar: 825 parkeringsplatser.

SLUT!