Lunds Tekniska Högskola	**Lösningar, FMSF40**
Matematik	**Sannolikhetsteori och Diskret Matematik**
Helsingborg	**2022-04-20**

1a) Att A och B är disjunkta betyder att $P(A \cap B) = 0$. I så fall gäller

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.7 - 0 = 1.3$$

vilket är en motsägelse. Alltså kan A och B inte vara disjunkta.

1b) Att C och D är oberoende betyder att

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = 0.2 \cdot 0.7 = 0.14.$$

Då C och D är disjunkta gäller dock $P(C \cap D) = 0$, så C och D kan inte vara oberoende.

2) Sanningstabellen för påståendet $\big(\neg\left((p \wedge q) \to r\right)\big) \leftrightarrow \left(p \to (q \to r)\right)$ är

p q r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$\neg\left((p \wedge q) \to r\right)$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$\big(\neg\left((p \wedge q) \to r\right)\big) \leftrightarrow \left(p \to (q \to r)\right)$
0 0 0	0	1	0	1	1	0
0 0 1	0	1	0	1	1	0
0 1 0	0	1	0	0	1	0
0 1 1	0	1	0	1	1	0
1 0 0	0	1	0	1	1	0
1 0 1	0	1	0	1	1	0
1 1 0	1	0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	0	1	1	0

Påståendet är alltså en kontradiktion.

3) Då

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{16}\right]_0^a = \frac{a^4}{16}$$

gäller $a^4 = 16$ vilket ger $a = \pm 2$. Då $a \geq 0$ gäller alltså $a = 2$. Väntevärdet blir

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x \cdot \frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32}{20} = \frac{8}{5}.$$

För att bestämma variansen beräknas

$$E\left(\xi^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}.$$

Variansen blir alltså

$$V(\xi) = E\left(\xi^2\right) - \left(E(\xi)\right)^2 = \frac{8}{3} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{8}{3} - \frac{64}{25} = \frac{8}{75}.$$

4a) Antallet injektiva funktioner ges av

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

4b) Antallet surjektiva funktioner ges av

$$S(6,4) \cdot 4! = 65 \cdot 24 = 1560.$$

5) Vi har $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi (d/2)^2 h}{3} = \frac{\pi}{12} \cdot hd^2$. Gauss approximationsformler ger då

$$\begin{aligned}
V(V) &\approx \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \cdot V(h) + \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 \cdot V(d) \\
&= \left(\frac{\pi}{12} \cdot d^2\right)^2 \cdot V(h) + \left(\frac{\pi}{6} \cdot hd\right)^2 \cdot V(d) \\
&= \left(\frac{\pi}{12} \cdot 10^2\right)^2 \cdot 0.2^2 + \left(\frac{\pi}{6} \cdot 20 \cdot 10\right)^2 \cdot 0.2^2 \\
&= \frac{\pi^2}{144} \cdot 10^4 \cdot 0.04 + \frac{\pi^2}{36} \cdot 200^2 \cdot 0.04 \\
&= \frac{\pi^2}{144} \cdot 400 + \frac{\pi^2}{36} \cdot 1600 \\
&= \frac{25}{9}\pi^2 + \frac{400}{9}\pi^2 \\
&= \frac{425}{9}\pi^2.
\end{aligned}$$

Approximativa standardavvikelsen blir alltså $\sigma_V \approx \sqrt{\frac{425}{9}\pi^2} = \frac{5\pi}{3}\sqrt{17} = 21.59$ cm^3.

6) Vi bevisar påståendet

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

från uppgiften vid hjälp av matematisk induktion.
Bassteg: För $n = 1$ gäller $\mathrm{VL}_1 = 1 \cdot 1! = 1 \cdot 1 = 1$ och $\mathrm{HL}_1 = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$. Vi har alltså $\mathrm{VL}_1 = \mathrm{HL}_1$ dvs. påståendet gäller för $n = 1$.
Induktionssteg: Antag påståendet gäller för $n = p - 1$, dvs.

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + (p-1) \cdot (p-1)! = p! - 1. \qquad (\star)$$

Vi bevisar påståendet för $n = p$. Vi har

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_p &= 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + p \cdot p! \\
&= \underbrace{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + (p-1) \cdot (p-1)!} + p \cdot p! \\
&\overset{(\star)}{=} \underbrace{p! - 1} + p \cdot p! \\
&= 1 \cdot p! + p \cdot p! - 1 \\
&= (1+p) \cdot p! - 1 \\
&= (p+1)! - 1 \\
&= \mathrm{HL}_p
\end{aligned}$$

Påståendet gäller alltså också för $n = p$. Enligt induktionsprincippen gäller påståendet alltså för alla $n \geq 1$.

7) Den önskade sannolikhet ges av $P(\xi_1+\xi_2 \geq 3) = 1-P(\xi_1+\xi_2 \leq 2)$. Då de två preparat är oberoende gäller

$$
\begin{aligned}
P(\xi_1 + \xi_2 \leq 2) &= P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) + P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 2)+ \\
&\quad P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) + P(\xi_1 = 2, \xi_2 = 0) \\
&= P(\xi_1 = 0) \cdot P(\xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 0) \cdot P(\xi_2 = 1) + P(\xi_1 = 0) \cdot P(\xi_2 = 2)+ \\
&\quad P(\xi_1 = 1) \cdot P(\xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 1) \cdot P(\xi_2 = 1) + P(\xi_1 = 2) \cdot P(\xi_2 = 0) \\
&= \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^0}{0!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} + \\
&\quad \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^1}{1!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} + \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} \\
&= e^{-3} \left(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot 1\right) \\
&= \tfrac{17}{2} \cdot e^{-3}.
\end{aligned}
$$

Den sökte sannolikhet är alltså $P(\xi_1 + \xi_2 \geq 3) = 1 - \frac{17}{2} \cdot e^{-3} = 0.57681$.

8a) Rekursionsekvationen är linjär och homogen av ordning 2. Karakteristiska ekvationen blir $x^2 = 6x-9$ som har dubbelroten $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Lösningen blir alltså $a_n = (C_1 n+C_2)\cdot 3^n$ för $n \geq 0$. Då $a_0 = 1$ och $a_1 = 5$ gäller

$$(C_1 \cdot 0 + C_2) \cdot 3^0 = 1 \Longleftrightarrow C_2 = 1,$$

och

$$(C_1 \cdot 1 + C_2) \cdot 3^1 = 5 \Longleftrightarrow (C_1 + 1) \cdot 3 = 5 \Longleftrightarrow C_1 = \tfrac{5}{3} - 1 = \tfrac{2}{3}.$$

Alltså gäller

$$a_n = \left(\tfrac{2}{3} \cdot n + 1\right) \cdot 3^n = (2n + 3) \cdot 3^{n-1}.$$

8b) Om $n \equiv 1 \pmod 5$ gäller $n = 1 + 5k$ för något $k \geq 0$. Då gäller

$$a_n = (2n + 3) \cdot 3^{n-1} = \big(2(1 + 5k) + 3\big) \cdot 3^{(1+5k)-1} = (10k + 5) \cdot 3^{5k} = 5\left((2k + 1) \cdot 3^{5k}\right),$$

vilket visar att $5 \mid a_n$.

9) Låt ξ_i beteckna utfallet av det i:ta tärningkastet och låt $\zeta = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_{50}$ beteckna produkten. Det är möjligt att beräkna $E(\zeta)$ och $V(\zeta)$ (eller approximationer av dessa vid hjälp av Gauss' approximationsformler), men detta hjälper inte då ζ inte är normalförrdelad. Centrala gränsvärdessatsen hjälper inte direkt då vi har en produkt och inte en summa. Vi måste därför först konvertera produkten till en summa vha. logaritmer. Låt $\eta_i = \ln(\xi_i)$, vi söker då sannolikheten

$$P\left(\zeta = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_{50} > 10^{25}\right) = P\left(\ln(\zeta) = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{50} > \ln\left(10^{25}\right)\right).$$

De stokastiska variablerna η_i är oberoende och likfördelade med sannolikhetsfördelingen

x	$0 = \ln(1)$	$\ln(2)$	$\ln(3)$	$\ln(4)$	$\ln(5)$	$\ln(6)$
$P(\eta_i = x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Detta ger

$$\mu = E(\eta_i) = 0 \cdot \frac{1}{6} + \ln(2) \cdot \frac{1}{6} + \ldots + \ln(6) \cdot \frac{1}{6} = 1.09654187$$

och

$$E\left(\eta_i^2\right) = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + \ln(2)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + \ln(6)^2 \cdot \frac{1}{6} = 1.56831774$$

vilket ger

$$V(\eta_i) = E\left(\eta_i^2\right) - \left(E(\eta_i)\right)^2 = 1.56831774 - 1.09654187^2 = 0.36591367$$

Standardavvikelsen blir alltså $\sigma = \sqrt{0.36591367} = 0.60490798$. Centrala gränsvärdessatsen ger att $\ln(\zeta) = \eta_1 + \eta_2 \ldots + \eta_{50}$ är approximativt normalfördelad $N(50\mu, \sigma\sqrt{50})$. Alltså gäller

$$\begin{aligned}
P\left(\zeta = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_{50} > 10^{25}\right) &= P\left(\ln(\zeta) = \eta_1 + \eta_2 \ldots + \eta_{50} > \ln\left(10^{25}\right)\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{\ln\left(10^{25}\right) - 50\mu}{\sigma\sqrt{50}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{25\ln(10) - 50 \cdot 1.09654187}{0.60490798\sqrt{50}}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.64000768) \\
&= 0.26108380
\end{aligned}$$

Anmärkning: Man kan visa att den exakta sannolikheten är

$$P\left(\zeta > 10^{25}\right) = \frac{213\,958\,272\,978\,896\,630\,842\,692\,765\,572\,971\,072\,262}{6^{50}} \cong 0.26470769$$

10) Vi bevisar att det finns minnst 91 sätt att välja 6 olika tal från $\{1, 2, \ldots, 15\}$ så att summen av de 6 tallen i varje val är den samma. Minsta och största möjliga sum av 6 olika tal är $1 + 2 + \ldots + 6 = 21$ och $15 + 14 + \ldots + 10 = 75$. Summen S av 6 olika tal från $\{1, 2, \ldots, 15\}$ uppfyller alltså $21 \leq S \leq 75$. Det finns alltså $75 - 21 + 1 = 55$ möjligheter för S. Totalt finns det

$$\binom{15}{6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 5 = 5005$$

möjligheter att välja 6 olika tal från $\{1, 2, \ldots, 15\}$. Vi använder nu de generella postfacksprincipen: De 5005 möjliga val (brev) ska placeras bland de 55 möjliga summar (postfack). Det finns alltså (minst) en möjlig summa (postfack) som motsvarar minst

$$\left\lfloor \frac{5005 - 1}{55} \right\rfloor + 1 = 91$$

möjliga val.

Anmärkning: Faktisk finns det 227 sätt att få varje av summerne 47, 48 och 49.