Lunds Tekniska Högskola
Matematik
Helsingborg

Lösningar, FMSF40
Sannolikhetsteori och Diskret Matematik
2021-10-29

1a) Låt ξ beteckna antallet blå kulor. Då är ξ hypergeometrisk fördelad

$$\xi \in \text{Hyp}\left(9+7, 5, \tfrac{9}{9+7}\right) = \text{Hyp}\left(16, 5, \tfrac{9}{16}\right)$$

Sannolikheten för 3 blå kulor är alltså

$$P(\xi = 3) = \frac{\binom{9}{3}\binom{16-9}{5-3}}{\binom{16}{5}} = \frac{\binom{9}{3}\binom{7}{2}}{\binom{16}{5}} = \frac{84 \cdot 21}{4368} = \frac{21}{52} \cong 0.403846.$$

1b) Låt η beteckna antallet blå kulor. Då är η binomialfördelad

$$\eta \in \text{Bin}\left(5, \tfrac{9}{9+7}\right) = \text{Bin}\left(5, \tfrac{9}{16}\right)$$

Sannolikheten för 3 blå kulor är alltså

$$P(\eta = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{9}{16}\right)^{5-3} = 10 \cdot \frac{9^3}{16^3} \cdot \frac{7^2}{16^2} = \frac{178\,605}{524\,288} \cong 0.340662.$$

2) Vi har $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Direkt beräkning ger

$$\mathcal{R} = \{(-2,-2), (-2,0), (-2,2), (-1,-1), (-1,1), (0,-2), (0,0), (0,2), \\ (1,-1), (1,1), (2,-2), (2,0), (2,2)\}.$$

Vi kan nu kolla de olika egenskaberne för $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ är reflexiv: $2x$ är jämn $\Longrightarrow x\mathcal{R}x$.

$\mathcal{R}$ är symmetrisk: $x\mathcal{R}y \Longrightarrow x+y$ är jämn $\Longrightarrow y+x$ är jämn $\Longrightarrow y\mathcal{R}x$.

$\mathcal{R}$ är inte antisymmetrisk: $0\mathcal{R}2$ och $2\mathcal{R}0$ men $0 \neq 2$.

$\mathcal{R}$ är transitiv: $x\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}z \Longrightarrow x+y$ och $y+z$ är jämna $\Longrightarrow x+2y+z = (x+y)+(y+z)$ är jämn $\Longrightarrow x+z = (x+2y+z) - 2y$ är jämn $\Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

$\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation: Detta följar från definition då $\mathcal{R}$ är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

3) Från texten erhålls $P(\text{mönster} \mid \text{sällsynt}) = 0.98$, $P(\text{mönster} \mid \text{vanlig}) = 0.05$ och $P(\text{sällsynt}) = 0.001$. Därför gäller

$$P(\text{vanlig}) = 1 - P(\text{sällsynt}) = 1 - 0.001 = 0.999.$$

Vi får nu

$$P(\text{mönster och sällsynt}) = P(\text{mönster} \,|\, \text{sällsynt}) \cdot P(\text{sällsynt}) = 0.98 \cdot 0.001 = 0.00098.$$

och

$$P(\text{mönster och vanlig}) = P(\text{mönster} \,|\, \text{vanlig}) \cdot P(\text{vanlig}) = 0.05 \cdot 0.999 = 0.04995.$$

vilket ger

$$\begin{aligned} P(\text{mönster}) &= P(\text{mönster och sällsynt}) + P(\text{mönster och vanlig}) \\ &= 0.00098 + 0.04995 = 0.05093. \end{aligned}$$

Alltså fås

$$P(\text{sällsynt} \,|\, \text{mönster}) = \frac{P(\text{mönster och sällsynt})}{P(\text{mönster})} = \frac{0.00098}{0.05093} = \frac{98}{5093} \cong 0.0192421.$$

4a) Välja någon student. Denna har 9 möjligheter för att bilda en grupp. Välja någon av de 8 kvarvarande studenter. Denna har 7 möjligheter för att bilda en grupp. Fortsätts på det här sättet fås 5 möjligheder för nästa student och 3 möjligheter för studenten efter denna. Äntligen har sista studenten 1 val. Multiplikationsprincippen ger alltså svaret

$$9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 945.$$

Alternativ: Första grupp kan väljas på $\binom{10}{2}$ sätt. Nästa grupp kan väljas på $\binom{8}{2}$ sätt. Fortsätts på det här sättet fås $\binom{6}{2}$ möjligheder för nästa grupp, $\binom{4}{2}$ möjligheder för gruppen efter denna och $\binom{2}{2}$ möjligheder för sista gruppen. Då gruppernes ordning inte spelar någon roll har vi alltså räknat varje gruppindelning 5! gånga. Antallet möjligheter är alltså

$$\frac{\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{5!} = \frac{45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 945.$$

4b) Första flicka har 5 möjliga val. Nästa har 4 möjliga val osv. till sista flicka som endast har ett val. Antallet möjligheter är alltså

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

5) Låt (som i uppgiften)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 0, \\ \frac{x^2}{27}(9-2x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}x^3 & \text{för } 0 \leq x \leq 3, \\ 1 & \text{för } x > 3 \end{cases}$$

och

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 0' & \text{för } x < 0, \\ \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}x^3\right)' & \text{för } 0 \leq x \leq 3, \\ 1' & \text{för } x > 3, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{för } x < 0 \text{ och } x > 3, \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 = \frac{2}{9}x(3-x) & \text{för } 0 \leq x \leq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vi visar att f är en frekvensfunktion och att F är den motsvarende fördelningsfunktion. Vi har $f(x) \geq 0$ och

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}x^3\right)' \mathrm{d}x + \int_{3}^{\infty} 0\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}x^3\right]_0^3 = \left(\frac{9}{3} - \frac{2\cdot 27}{27}\right) - (0-0) = 1.\end{aligned}$$

Alltså är f en frekvensfunktion. För att visa att F är den motsvarende fördelningsfunktion måste vi bevisa att

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) \tag{1}$$

för alla x. Vi delar beviset i 3 fall: Om $x < 0$ gäller

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 = F(x).$$

Om $0 \leq x \leq 3$ gäller

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{27}t^3\right)' \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{27}t^3\right]_0^x = F(x) - 0 = F(x).$$

Slutligen, om $x > 3$ gäller (enligt beräkningerna ovan)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{3} \left(\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{27}t^3\right)' \mathrm{d}t + \int_{3}^{x} 0\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{3}t^2 - \frac{2}{27}t^3\right]_0^3 = 1 = F(x).\end{aligned}$$

Alltså gäller (1) för alla x, dvs. F är fördelningsfunktionen motsvarende f.
Väntevärden for ξ ges av

$$\begin{aligned}E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{3} x\cdot\left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{9}x^2\right)\mathrm{d}x = \int_{0}^{3} \left(\tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{2}{9}x^3\right)\mathrm{d}x = \left[\tfrac{2}{9}x^3 - \tfrac{1}{18}x^4\right]_0^3 \\ &= \left(\tfrac{2}{9}\cdot 3^3 - \tfrac{1}{18}\cdot 3^4\right) - (0-0) = 6 - \tfrac{9}{2} = \tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

6) Sanningstabellen för påståendet

$$\big((r \to p) \wedge (q \to \neg p)\big) \to (q \to \neg r)$$

är

p q r	$r \to p$	$\neg p$	$q \to \neg p$	$(r \to p) \wedge (q \to \neg p)$	$\neg r$	$q \to \neg r$	$\big((r \to p) \wedge (q \to \neg p)\big) \to (q \to \neg r)$
0 0 0	1	1	1	1	1	1	1
0 0 1	0	1	1	0	0	1	1
0 1 0	1	1	1	1	1	1	1
0 1 1	0	1	1	0	0	0	1
1 0 0	1	0	1	1	1	1	1
1 0 1	1	0	1	1	0	1	1
1 1 0	1	0	0	0	1	1	1
1 1 1	1	0	0	0	0	0	1

Påståendet är alltså en tautologi.

7) Låt ξ beteckna antallet felbehäftade elektronrör. Då gäller $\xi \in \mathrm{Bin}(500, 0.04)$. Då det söks ett *approximativt* värde används centrala gränsvärdesatsen som ger att ξ är *approximativt* normalfördelad

$$\mathrm{N}(500 \cdot 0.04, \sqrt{500 \cdot 0.04 \cdot 0.96}) = \mathrm{N}(20, \sqrt{19.2}).$$

Den *approximativa* sannolikheten blir alltså

$$\begin{aligned}
P(10 \leq \xi \leq 25) &\approx \Phi\left(\frac{25-20}{\sqrt{19.2}}\right) - \Phi\left(\frac{10-20}{\sqrt{19.2}}\right) = \Phi\left(\frac{5\sqrt{30}}{24}\right) - \Phi\left(\frac{-5\sqrt{30}}{12}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{5\sqrt{30}}{24}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{5\sqrt{30}}{12}\right)\right) = \Phi\left(\frac{5\sqrt{30}}{24}\right) + \Phi\left(\frac{5\sqrt{30}}{12}\right) - 1 \\
&\cong 0.873083 + 0.988761 - 1 = 0.861844.
\end{aligned}$$

8) Vi bevisar först följande:

Hjälpsats: För $p \geq 1$ gäller

$$2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2} < 2 - \frac{1}{p+1} \tag{2}$$

Bevis: Vi har

$$\begin{aligned}
\mathrm{HL} - \mathrm{VL} &= 2 - \frac{1}{p+1} - \left(2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) \\
&= -\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{(p+1)^2} \\
&= -\frac{p(p+1)}{p(p+1)^2} + \frac{(p+1)^2}{p(p+1)^2} - \frac{p}{p(p+1)^2} \\
&= \frac{-p(p+1) + (p+1)^2 - p}{p(p+1)^2} \\
&= \frac{-p^2 - p + p^2 + 2p + 1 - p}{p(p+1)^2} \\
&= \frac{1}{p(p+1)^2} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Alltså gäller HL > VL och hjälpsatsen är bevisad.

Vi kan nu bevisa olikheten

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

från uppgiften vid hjälp av matematisk induktion.

Bassteg: För $n=1$ gäller $\mathrm{VL}_1 = \frac{1}{1^2} = 1$ och $\mathrm{HL}_1 = 2 - \frac{1}{1} = 1$. Vi har alltså $\mathrm{VL}_1 \leq \mathrm{HL}_1$ dvs. påståendet gäller för $n=1$.

Induktionssteg: Antag påståendet gäller för $n=p$, dvs.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{p^2} \leq 2 - \frac{1}{p} \tag{$\star$}$$

Vi bevisar påståendet för $n = p+1$. Vi har

$$\begin{aligned}
\mathrm{VL}_{p+1} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(p+1)^2} \\
&= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{p^2}\right) + \frac{1}{(p+1)^2} \\
&\overset{(\star)}{\leq} \left(2 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{(p+1)^2} \\
&\overset{(2)}{<} 2 - \frac{1}{p+1} \\
&= \mathrm{HL}_{p+1}
\end{aligned}$$

Påståendet gäller alltså också för $n = p+1$. Enligt induktionsprincippen gäller påståendet alltså för alla $n \geq 1$.

9a) Enligt formelsamlingen gäller

$$E(\xi) = \frac{1.9 + 2.1}{2} = 2 \quad \text{och} \quad V(\xi) = \frac{(2.1 - 1.9)^2}{12} = \frac{1}{300} \cong 0.00333333.$$

Då $A = \xi^2$ ger Gauss approximationformler (med $g(x) = x^2$ och $g'(x) = 2x$) att

$$E(A) \approx \big(E(\xi)\big)^2 = 2^2 = 4$$

och

$$V(A) \approx \big(2E(\xi)\big)^2 \cdot V(\xi) = (2 \cdot 2)^2 \cdot \frac{1}{300} = \frac{4}{75} \cong 0.0533333.$$

9b) Frekvensfunktionen för ξ ges av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2.1 - 1.9} = 5 & \text{för } 1.9 < x < 2.1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Alltså fås

$$\begin{aligned}
E(A) = E\left(\xi^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1.9}^{2.1} x^2 \cdot 5\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{5}{3} x^3\right]_{1.9}^{2.1} = \tfrac{5}{3}\left(2.1^3 - 1.9^3\right) \\
&= \tfrac{5}{3} \cdot 2.402 = \frac{1201}{300} \cong 4.00333.
\end{aligned}$$

Dessutom gäller

$$E\left(A^2\right) = E\left(\xi^4\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1.9}^{2.1} x^4 \cdot 5\,\mathrm{d}x = \left[x^5\right]_{1.9}^{2.1} = 2.1^5 - 1.9^5 = 16.08002.$$

Variansen blir alltså

$$V(A) = E\left(A^2\right) - \left(E(A)\right)^2 = 16.08002 - \left(\frac{1201}{300}\right)^2 = \frac{6001}{112500} \cong 0.0533422.$$

10a) Påståendet är sant. Låt $c \in C$ vara godtycklig. Då g är surjektiv finns $b \in B$ så att $g(b) = c$. Då f också är surjektiv finns $a \in A$ så att $f(a) = b$. Vi har nu

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c.$$

Det finns alltså $a \in A$ så att $(g \circ f)(a) = c$, dvs. $g \circ f$ är surjektiv.

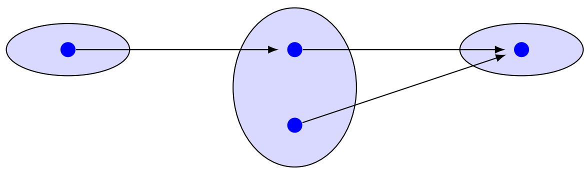
10b) Påståendet är sant. Låt $c \in C$ vara godtycklig. Då $g \circ f \colon A \to C$ är surjektiv finns $a \in A$ så att $(g \circ f)(a) = c$. Låt $b = f(a)$. Då gäller

$$g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = c.$$

Det finns alltså $b \in B$ så att $g(b) = c$, dvs. g är surjektiv.

10c) Påståendet är falskt. Betrakta funktionerna

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$



Då är båda g och $g \circ f$ surjektiva, men f är inte surjektiv.