LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
SANNOLIKHETSTEORI OCH DISKRET MATEMATIK
2020-08-22

1. a) $P(\text{ingen deffekt propp}) = \dfrac{\binom{6}{0}\cdot\binom{7}{5}}{\binom{13}{5}} = 0.0163$

b) $P(2\text{ korrekta}) = \dfrac{\binom{7}{2}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{13}{5}} = 0.326$

c) $P(\text{minst 2 } korrekta) = 1 - \big(P(0\ korrekta) + P(1\ korrekt)\big) = 1 - \dfrac{\binom{6}{5}\cdot\binom{7}{0} + \binom{6}{4}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{13}{5}} = 0.913$

2. a) Antalet bilnummer är $23^3 \cdot 10^3 = 12167 \cdot 10^3$.

b) Antalet sätt att välja tre **olika** bokstäver och antalet sätt att välja tre **olika** siffror är $23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7650720$.

Alt: ${}_{23}P_3 \cdot {}_{10}P_3 = 7650720$

3. a) $\xi \in P_O(4)$: $\mathrm{P}(\xi > 3) = 1 - P(\xi \le 3) = 1 - e^{-4}\left(\dfrac{4^0}{0!} + \dfrac{4^1}{1!} + \dfrac{4^2}{2!} + \dfrac{4^3}{3!}\right) = 0.566$.

b) $\xi \in Bin(10, 0.92)$: $\mathrm{P}(\xi = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0.92^7 \cdot (1 - 0.92)^3 = 0.0342$

4. $xRy \Leftrightarrow x + 2 \le y$ ger att relationen är $R = \{(1,3), (1,4), (1,5), (1,7), (3,5), (3,7), (4,7), (5,7)\}$.

Relationen är ingen funktion, ty t.ex. till elementet1 relateras **flera** än ett element.

Matris: $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $\mu = E(\xi) = 0 \cdot 0.10 + 1 \cdot 0.25 + ... + 4 \cdot 0.05 = 1.85$

$E(\xi^2) = 0^2 \cdot 0.10 + 1^2 \cdot 0.25 + ... + 4^2 \cdot 0.05 = 4.45$

$V(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = 1.0275, \quad \sigma = \sqrt{V(\xi)} = 1.01$

6. a) Använd Stirligtal: $S(9,3) = 3025$. b) $S(8,3) = 966$.

c) $S(9,3) - S(8,3) = 2059$.

7. Rekursionsekvationen $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ har karakteristiska ekvationen

$x^2 = -4x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -2$.

Då får vi $a_n = u \cdot (-2)^n + v \cdot n(-2)^n = (-2)^n \cdot (u + vn)$

Vi bestämmer u och v med hjälp av villkoren.

$\begin{matrix} a_1 = -3 : (-2)^1 (u + v \cdot 1) = -3 \\ a_2 = 2 : (-2)^2 (u \cdot + v \cdot 2) = 2 \end{matrix}$. Vi får $\begin{cases} -2u - 2v = -3 \\ 4(u + 2v) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 2v = 3 \\ 2u + 4v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\dfrac{5}{2} \\ v = -1 \end{cases}$ som ger

den explicita formeln för $a_n = (-2)^n \left(-\dfrac{5}{2} - n \right) = (-1)^{n+1} \cdot 2^n \left(\dfrac{5}{2} + n \right)$

8. a) Använd $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. $\int_{-1}^{2} a(4 - x^2)dx = 1 \Leftrightarrow a\left[4x - \dfrac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = 1 \Leftrightarrow 9a = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{9}$.

b) $P(\xi > 0) = \int_{0}^{2} \dfrac{1}{9}(4 - x^2)\,dx = \dfrac{1}{9}\left[4x - \dfrac{x^3}{3} \right]_{0}^{2} = \dfrac{16}{27} = 0.59.$

9. $15 \mid 4^{2n} - 1, \ n \geq 1$, (15 är delare i $4^{2n} - 1$), $n \in Z$.

Bassteg: $n = 1$ är sant.

Antag sant för $n = p$, d.v.s. $15 \mid 4^{2p} - 1$, detta betyder att $4^{2p} - 1 = 15m$.

Visa sant för $n = p + 1$: $15 \mid 4^{2(p+1)} - 1$.

Bevis:

$4^{2(p+1)} - 1 = 4^{2p+2} - 1 = 4^{2p} \cdot 4^2 - 1 = 4^{2p} \cdot 16 - 1 = 4^{2p} \cdot (15 + 1) - 1 = 15 \cdot 4^{2p} + 4^{2p} - 1 =$

$= 15 \cdot 4^{2p} + 15m = 15 \cdot (4^{2p} + m)$

Vi får att 15 är en faktor i $4^{2(p+1)} - 1$, dvs. $15 \mid 4^{2(p+1)} - 1$.

Då är $15 \mid 4^{2n} - 1$, för alla heltal $n \geq 1$.

Alt: Om man kommer ihåg geometrisk summa så kan man använda att $4^{2n} - 1 = 16^n - 1$

och $\sum_{k=0}^{n-1} 16^k = \frac{16^n - 1}{16 - 1} = \frac{16^n - 1}{15}$ då ska man bevisa att $\sum_{k=0}^{n-1} 16^k = \frac{16^n - 1}{15}$ för alla $n \geq 1$.

10. ξ = mängden aktiv substans i en tablett. $\xi \in N(2, \sigma)$.
En förpackning innehåller 20 tabletter.
Stokastiska variabeln $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_{20}$ har $\mu = E(\eta) = 20 \cdot 2 = 40$ och
$D(\eta) = \sqrt{V(\eta)} = \sqrt{20 \cdot \sigma^2} = \sigma \cdot \sqrt{20}$.

$$P(\eta \leq 38) \leq 0.01 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{38 - 40}{\sigma\sqrt{20}}\right) \leq 0.01 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{-2}{\sigma \cdot \sqrt{20}}\right) \leq 0.01 \Leftrightarrow$$

$$1 - \Phi\left(\frac{2}{\sigma \cdot \sqrt{20}}\right) \leq 0.01 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{2}{\sigma \cdot \sqrt{20}}\right) \geq 0.99 \Leftrightarrow \frac{2}{\sigma \cdot \sqrt{20}} \geq 2.326 \Leftrightarrow \sigma \leq \frac{2}{2.326\sqrt{20}} \Leftrightarrow$$

$\sigma \leq 0.192$