LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
SANNOLIKHETSTEORI OCH DISKRET MATEMATIK
2020-10-30

1. a) 30 element och 2^{30} delmängder,
b) Antalet udda tal =3, antalet vokaler =2, antalet element med bara jämna tal eller bara konsonanter blir 30-6=24, antalet delmängder är 2^{24}.

Alt: Antalet jämna tal i $A\times B$ =15,
Antalet $A\times$konsonanter i B =21
Antalet element jämna tal i$A\times$konsonanter iB =9.
Detta ger att antalet bara jämna tal i A eller bara konsonanter i B blir $2^{15+18-9}=2^{24}$.

2. a)

$$P(\xi\ge 10)=\int_{10}^{\infty}0{,}125e^{-0{,}125x}dx=1-\int_{0}^{10}0{,}125e^{-0{,}125x}dx=1-\left[-e^{-0{,}125x}\right]_0^{10}=1-\left(-e^{-1{,}25}+1\right)=0.286.$$

b) $\xi\in Bin\left(10,\dfrac{2}{3}\right)$, $P(\xi\ge 9)=P(\xi=9)+P(\xi=10)=0.10405$

3. a) $S(7,4)\cdot 4!=8400$. b) $S(7,4)+S(7,3)+S(7,2)+S(7,1)=715$

4. a)

x	0	1	3	10
$P(\xi=x)$	0.5	0.25	0.125	0.125

b) $E(\xi)=0\cdot 0.5+1\cdot 0.25+3\cdot 0.125+10\cdot 0.125=1.875\,\$$
Han spelar 100 gånger och satsar 100$ så vinsten kan bli
$100\cdot E(\xi)-100=187.5-100=87.5\,\$$

5. p: John körde bil så
q: Henry är oskyldig.
r: Carter avfyrade revolvern

Detta kan skrivas som

$$\begin{array}{l} p\to q \\ r\to\neg q \\ \hline \therefore\ r\to\neg p \end{array}$$

Med sanningsvärdestabellen för $\left(\left(p\to q\right)\wedge\left(r\to\neg q\right)\right)\to\left(r\to\neg p\right)$
kan du visa att detta är tautologi, alltså argumentet är giltigt.

6. $f(x)$ är en frekvensfunktion vi vet att $f(x) = F'(x)$. Vi får

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ k(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \text{, eftersom } \left(kx\left(1-\frac{x^2}{3}\right)\right)' = k\left(x-\frac{x^3}{3}\right)' = k(1-x^2)$$

Vi bestämmer k: $\int_{-\infty}^{\infty} k(1-x^2)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} k(1-x^2)dx = 1 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$.

Svar: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{3}{4}(1-x^2), & -1 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

7. $A = Z_+$ och definiera relationen R på A genom $xRy \Leftrightarrow x \le 3y$.

a) R är reflexiv, ty $xRx \Leftrightarrow x \le 3x$ för alla x.

b) R är inte symmetrisk . Symmetrisk om $xRy \Rightarrow yRx$.
Motexempel: $x = 1, y = 4$ ger $1 \le 3 \cdot 4$ men $4 \ge 3 \cdot 1$

c) R är inte transitiv. Transitiv om xRy och $yRz \Rightarrow xRz$
Motexempel: $x = 13, y = 5, z = 4$ ger $13 \le 3 \cdot 5$ och $5 \le 3 \cdot 4$ men $13 \ge 3 \cdot 4$

8. B = bagaget är borta, M = En missnöjd passagerare.

$$P(B|M) = \frac{P(B) \cdot P(M|B)}{P(M)} = \frac{0.05 \cdot 0.9}{0.08} = 0.5625.$$

9. Bassteg: $n = 1$ är sant.

Antag att för $n = k$: $\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} < 2^{2k}$ är sant.

Visa att det är sant även för $n = k+1$: $\binom{2(k+1)}{k+1} < 2^{2k+2}$.

Bevis:

$$\binom{2(k+1)}{k+1} = \frac{(2(k+1))!}{(k+1)! \cdot (k+1)!} = \frac{(2k)! \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)}{k! \cdot (k+1) \cdot k! \cdot (k+1)} = \frac{(2k)!}{k! \cdot k!} \cdot \frac{(2k+1)2(k+1)}{(k+1)(k+1)} < 2^{2k} \cdot \frac{2(2k+1)}{k+1} <$$

$$< 2^{2k} \cdot \frac{2(2k+2)}{k+1} = 2^{2k} \cdot 2 \cdot 2 = 2^{2k+2}$$. D.v.s. påståendet är sant för alla n.

10. ξ_i = CO-mängd per km hos en slumpmässigt vald bil, $\xi_i \in N(7.8, 3.5)$.

$\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_{100}$. Vi ska bestämma $P(\eta > 850)$. Man behöver
$E(\eta) = E(\xi_1) + \ldots + E(\xi_{100}) = 100 \cdot 7.8 = 780$ och
$D(\eta) = \sqrt{V(\eta)} = \sqrt{V(\xi_1) + \ldots + V(\xi_{100})} = \sqrt{100 \cdot 3.5^2} = 35$ vi har att $\eta \in N(780, 35)$.

$$P(\eta > 850) = 1 - P(\eta \le 850) = 1 - \Phi\left(\frac{850 - 780}{35}\right) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725 =$$

$$= 0.02275$$

SLUT!