Lunds Tekniska Högskola
Matematik
Helsingborg

Lösningar
Matematisk Statistik, FMSF30
2019-08-24

1. a) Vi har

$$P(\xi > 5) = 1 - F(5) = 1 - \left(1 - e^{-0.1\cdot 5}\right) = e^{-0.5} = {}^1\!/\!\sqrt{e} = 0.60653.$$

b) Låt ξ vara antalet inkommande samtal under en period på ett minut. Vi har $\xi \in \mathrm{Po}(\lambda)$ där $\lambda = \mu = 5$. Detta ger

$$\begin{aligned} P(\xi \le 2) &= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) \\ &= \frac{e^{-5}\cdot 5^0}{0!} + \frac{e^{-5}\cdot 5^1}{1!} + \frac{e^{-5}\cdot 5^2}{2!} = e^{-5}\cdot\left(1 + 5 + \frac{25}{2}\right) \\ &= \frac{37}{2\cdot e^5} = 0.12465. \end{aligned}$$

c) Sannolikheten blir

$$\begin{aligned} P(\text{minst 2 blå}) &= P(\text{2 eller 3 blå}) \\ &= \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} \\ &= \frac{2\cdot 10}{35} + \frac{1\cdot 10}{35} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7} = 0.85714. \end{aligned}$$

Alternativ: (observera att $P(\text{0 blå}) = 0$ då man får minst 1 blå):

$$\begin{aligned} P(\text{minst 2 blå}) &= 1 - P(\text{högst 1 blå}) = 1 - P(\text{1 blå}) \\ &= 1 - \frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{7}{3}} = 1 - \frac{1\cdot 5}{35} \\ &= 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} = 0.85714. \end{aligned}$$

2. a) Låt ξ vara resistansen av en resistor, vi har då $\xi \in N(1200, 40)$. Därför gäller

$$\begin{aligned} P(\xi \text{ är utanför intervallet}) &= 1 - P(1150 \le \xi \le 1300) \\ &= 1 - \left(\Phi\left(\frac{1300 - 1200}{40}\right) - \Phi\left(\frac{1150 - 1200}{40}\right)\right) \\ &= 1 - \left(\Phi(2.5) - \Phi(-1.25)\right) \\ &= 1 - \left(\Phi(2.5) - (1 - \Phi(1.25))\right) \\ &= 2 - \Phi(2.5) - \Phi(1.25) \\ &= 2 - 0.99379 - 0.89435 = 0.11186. \end{aligned}$$

b) Låt η beteckna antalet resistorer (av de 10 stycken) vars resistans ligger utanför intervallet $[1150, 1300]$. Då är η binomialfördelad, $\eta \in \text{Bin}(10, p)$ var $p = 0.11186$ enligt uppgift **a)**. Vi har då

$$P(\eta = 8) = \binom{10}{8} \cdot p^8 \cdot (1-p)^{10-8} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} \cdot 0.11186^8 \cdot 0.88814^2 = 8.7008 \times 10^{-7}.$$

c) Sannolikheten blir

$$\begin{aligned} P(\eta \leq 3) &= \sum_{x=0}^{3} P(\eta = x) = \sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{10-x} \\ &= \sum_{x=0}^{3} \binom{10}{x} \cdot 0.11186^x \cdot 0.88814^{10-x} \\ &= 0.30536 + 0.38460 + 0.21798 + 0.073210 = 0.98115. \end{aligned}$$

3. a) Då f är en frekvensfunktion gäller

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 ax^2(1-x)\,\mathrm{d}x = a\int_0^1 x^2 - x^3\,\mathrm{d}x = a\left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 = a \cdot \tfrac{1}{12},$$

vilket ger $a = 12$.

b) Beräkning ger

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot 12x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = 12\int_0^1 x^3 - x^4\,\mathrm{d}x = 12\left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 \\ &= \frac{12}{20} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Väntevärden är alltså $E(\xi) = \frac{3}{5}$. För at bestämma variansen beräknas

$$\begin{aligned} E\left(\xi^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot 12x^2(1-x)\,\mathrm{d}x = 12\int_0^1 x^4 - x^5\,\mathrm{d}x = 12\left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6\right]_0^1 \\ &= \frac{12}{30} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Detta ger variansen

$$V(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E(\xi)^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

c) Enligt Sats 5Ba) gäller

$$E(\xi + 2\eta) = E(\xi) + 2 \cdot E(\eta) = \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}.$$

och enligt Sats 5Bb) gäller

$$V(\xi + 2\eta) = V(\xi) + 2^2 \cdot V(\eta) = \frac{1}{25} + 4 \cdot \frac{1}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

4. Låt S ("sjuk") beteckna händelsen att en given person är sjuk och F ("frisk") beteckna händelsen att en given person är frisk. Då gäller

$$P(S) = 0.01 \qquad \text{och} \qquad P(F) = 0.99.$$

Låt DS ("diagnos sjuk") beteckna händelsen att läkaren diagnosticerar personen sjuk och DF ("diagnos frisk") beteckna händelsen att läkaren diagnosticerar personen frisk. Då gäller enligt uppgiften att

$$P(DS|S) = 0.8 \qquad \text{och} \qquad P(DF|F) = 0.95.$$

a) Från ovan fås

$$P(DF|S) = 1 - 0.8 = 0.2 \qquad \text{och} \qquad P(DS|F) = 1 - 0.95 = 0.05.$$

Detta ger

$$\begin{aligned} P(\text{felaktig diagnos}) &= P(DF \cap S) + P(DS \cap F) \\ &= P(S) \cdot P(DF|S) + P(F) \cdot P(DS|F) \\ &= 0.01 \cdot 0.2 + 0.99 \cdot 0.05 \\ &= 0.002 + 0.0495 \\ &= 0.0515. \end{aligned}$$

b) Sannolikheten att statistikern ställar fel diagnos är samma som sannolikheten att personen är sjuk, dvs 0.01 vilket är mindre än svaret i uppgift **a)**. Lägg dock märka till att läkaren kan göra fel av två slag: diagnosticera en sjuk person som frisk eller diagnosticera en frisk person sjuk. Det är olämpligt att sammanslå motsvarende felsannolikheter för att jämföra läkaren och statistikern. Det första slaget av fel är i allmänhet allvarligare än det andra. Läkaren har sannolikhet 0.002 för att göra fel av denna typ medan statistikern har sannolikhet 0.01 för denna typ fel. Statistikern har alltså 5 gånga så stor risk att missa att en person är sjuk!

c) Sannolikheten att läkaren diagnosticerar en person sjuk är

$$\begin{aligned} P(DS) &= P(DS \cap S) + P(DS \cap F) = P(S) \cdot P(DS|S) + P(F) \cdot P(DS|F) \\ &= 0.01 \cdot 0.8 + 0.99 \cdot 0.05 = 0.008 + 0.0495 = 0.0575. \end{aligned}$$

Den sökta sannolikhet är då

$$P(S|DS) = \frac{P(S \cap DS)}{P(DS)} = \frac{P(S) \cdot P(DS|S)}{P(DS)} = \frac{0.01 \cdot 0.8}{0.0575} = 0.13913.$$

Detta är en ganske låg sannolikhet!

5. Situationen är "stickprov i par". Vi antar att resultaten för laborant A och B på dag nummer i kan ses som stokastiska variabler $\xi_i \in N(\mu_i, \sigma_1)$ respektiva $\eta_i \in N(\mu_i + \Delta, \sigma_2)$, där σ_1 och σ_2 är okände. Vi antar dessutom att paren $(\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_8, \eta_8)$

är oberoende. Då gäller $\zeta_i = \eta_i - \xi_i \in N(\Delta, \sigma)$. Låt de observerade värden vara $x_1, \ldots, x_8$ respektive $y_1, \ldots, y_8$ och sätt $z_i = y_i - x_i$. Ett konfidensintervall för Δ med konfidensgrad $1 - \alpha$ ges då av

$$I_{\Delta,\text{obs}} = \left[\bar{z} \pm t_{\alpha/2}(8-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{8}}\right]$$

där s är den observerade värde av punktskattningen av σ med s-metoden. Beräkning ger värden

i	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	1	6	-1	4	-1	3	6	3

Vi har $\sum_{i=1}^{8} z_i = 21$ varav $\bar{z} = \frac{21}{8} = 2.625$. Då σ är okänd beräknes $\sum_{i=1}^{8} z_i^2 = 109$, vilket ger

$$s = \sqrt{\frac{1}{7}\left(109 - \frac{21^2}{8}\right)} = \sqrt{\frac{431}{56}} = 2.77424.$$

Då $1 - \alpha = 0.95$ fås $\alpha = 0.05$ och tabell ger $t_{\alpha/2}(8-1) = t_{0.025}(7) = 2.36462$. Konfidensintervallet blir då

$$I_{\Delta,\text{obs}} = \left[2.625 \pm 2.36462 \cdot \frac{2.77424}{\sqrt{8}}\right] = [0.30, 4.95].$$

Då intervallet inte innehåller 0 antyder resultatet att det föreligger en systematisk skillnad.

6. Vi har $\xi \in \text{Exp}(\lambda)$ och $\theta = {}^{1}/_{\lambda}$. Hypotes och mothypotes blir

$$H_0 : \theta = 1000 \qquad \text{och} \qquad H_1 : \theta < 1000.$$

Låt $k < 1000$ vara givet. Vi använder följande test:

- Om $\xi < k$ så förkastas H_0,
- Om $\xi \geq k$ så förkastas H_0 inte,

där talet k är vald så att

$$P(\text{förkasta } H_0 | H_0 \text{ sann}) = 0.05.$$

Beräkning ger

$$\begin{aligned} P(\text{förkasta } H_0 | H_0 \text{ sann}) &= P(\xi < k \mid \theta = 1000) \\ &= P(\xi < k \mid \xi \in \text{Exp}({}^{1}/_{1000})) \\ &= 1 - e^{-k \cdot {}^{1}/_{1000}}. \end{aligned}$$

Konstanten k bestämmes då av

$$\begin{aligned} 1 - e^{-k/1000} = 0.05 &\iff e^{-k/1000} = 0.95 \\ &\iff -{}^{k}/_{1000} = \ln(0.95) \\ &\iff k = -1000 \cdot \ln(0.95) = 51.3. \end{aligned}$$

Då Per observerar $\xi = 75$ förkastas H_0 inte.