**Lunds Tekniska Högskola** **Lösningar**
**Matematik** **FMSF30**
**Helsingborg** **2019-04-24**

**1. a)**

$$\begin{aligned}
P(\xi > 3) &= 1 - P(\xi \leq 3) \\
&= 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3)) \\
&= 1 - \left( \binom{13}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^{13} + \binom{13}{1} \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^{12} + \binom{13}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^{11} \right. \\
&\quad \left. + \binom{13}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^{10} \right) \\
&= \frac{579\,394\,354\,239}{10^{12}} \cong 0.57939.
\end{aligned}$$

**b)**

$$\begin{aligned}
P(\text{färra än 3 defekta}) &= P(0,\ 1 \text{ eller } 2 \text{ defekta}) \\
&= \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{6}{5}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{4}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{10}{5}} \\
&= \frac{1 \cdot 6}{252} + \frac{4 \cdot 15}{252} + \frac{6 \cdot 20}{252} = \frac{186}{252} = \frac{31}{42} \cong 0.73810.
\end{aligned}$$

Alternativ: (observera att $P(5 \text{ defekta}) = 0$ då man högst kan få 4 defekta):

$$\begin{aligned}
P(\text{färra än 3 defekta}) &= 1 - P(\text{minnst 3 defekta}) = 1 - \big(P(3 \text{ eller } 4 \text{ defekta})\big) \\
&= 1 - \left( \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{5}} \right) = 1 - \left( \frac{4 \cdot 15}{252} + \frac{1 \cdot 6}{252} \right) \\
&= 1 - \frac{66}{252} = \frac{31}{42} \cong 0.73810.
\end{aligned}$$

**c)**

$$P(\zeta < 7) = \Phi\left(\frac{7-8}{0.5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \cong 1 - 0.97725 = 0.02275.$$

**2.** Antallet möjliga fall är $6 \cdot 6 = 36$. Låt $\xi_1$ beteckna värdet av 1:a tärningkastet och $\xi_2$ beteckna värdet av 2:a tärningkastet.

**a)** De gynnsamma fall är

$(\xi_1, \xi_2) \in \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$.

Sannolikheten blir då $P(A) = {}^{12}/_{36} = {}^{1}/_{3}$.

Alternativ: Sannolikheten för $A$ är samma som sannolikheten för att slå två eller fem med en terning (värdet av det andra tärningkastet är irrelevant). Alltså är $P(A) = {}^2\!/\!_6 = {}^1\!/\!_3$.

**b)** De gynnsamma fall är

$$\begin{aligned}(\xi_1, \xi_2) \in \{&(1,6),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),\\ &(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.\end{aligned}$$

Sannolikheten blir då $P(B) = {}^{21}\!/\!_{36} = {}^7\!/\!_{12}$.

**c)** Vi beräkner först $P(A \cap B)$. De gynnsamma fall ges av

$$(\xi_1, \xi_2) \in \{(2,5),(2,6),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}.$$

Sannolikheten blir då $P(A \cap B) = {}^7\!/\!_{36}$. Från a) och b) fås

$$P(A) \cdot P(B) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{7}{12} = \tfrac{7}{36}.$$

Alltså gäller $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, dvs. händelserna $A$ och $B$ är oberoende.

**3. a)**

$$\begin{aligned}P(\text{gul}) &= P(\text{gul och bil}) + P(\text{gul och cykel})\\ &= P(\text{bil}) \cdot P(\text{gul} \mid \text{bil}) + P(\text{cykel}) \cdot P(\text{gul} \mid \text{cykel})\\ &= 0.3 \cdot (1 - 0.8) + 0.7 \cdot (1 - 0.25) = 0.585.\end{aligned}$$

**b)** Från a) fås

$$P(\text{cykel} \mid \text{blå}) = \frac{P(\text{cykel}) \cdot P(\text{blå} \mid \text{cykel})}{P(\text{blå})} = \frac{0.7 \cdot 0.25}{1 - 0.585} = \frac{35}{83} \cong 0.42169.$$

**4.** Vi har

$$E(\xi) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.28 + 3 \cdot 0.23 + 4 \cdot 0.11 + 5 \cdot 0.11 + 6 \cdot 0.07 = 2.86$$

och

$$E\left(\xi^2\right) = 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.28 + 3^2 \cdot 0.23 + 4^2 \cdot 0.11 + 5^2 \cdot 0.11 + 6^2 \cdot 0.07 = 10.42.$$

Därmed är variansen för $\xi$

$$V(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E(\xi)^2 = 10.42 - 2.86^2 = 2.2404.$$

Enligt Sats 5A a) och b) gäller då

$$E(3\xi + 5) = 3E(\xi) + 5 = 3 \cdot 2.86 + 5 = 13.58$$

och

$$V(3\xi + 5) = 3^2 V(\xi) = 3^2 \cdot 2.2404 = 20.1636.$$

Standardavvikelsen blir alltså

$$\sigma(3\xi + 5) = \sqrt{V(3E(\xi) + 5)} = \sqrt{20.1636} \cong 4.49039.$$

**5.** Situationen är 'två stickprov'. Låt $x_1, \ldots, x_5$ beteckna observationerna från tobakssort $A$ och $y_1, \ldots, y_5$ beteckna observationerna från tobakssort $B$. Vi har $n_x = n_y = 5$ och beräkning ger

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 117, \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i = 135, \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 2759 \qquad \text{och} \qquad \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 3679.$$

Herav fås

$$\overline{x} = \frac{117}{5} = 23.4 \qquad \text{och} \qquad \overline{y} = \frac{135}{5} = 27$$

samt

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{5-1}\left(2759 - \frac{117^2}{5}\right) = 5.3 \qquad \text{och} \qquad \sigma_y^2 = \frac{1}{5-1}\left(3679 - \frac{135^2}{5}\right) = 8.5.$$

Med

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{obs}}^* &= \sqrt{\frac{(n_x - 1)\cdot\sigma_x^2 + (n_y - 1)\cdot\sigma_y^2}{(n_x - 1) + (n_y - 1)}} = \sqrt{\frac{(5-1)\cdot 5.3 + (5-1)\cdot 8.5}{(5-1) + (5-1)}} \\ &= \sqrt{6.9} \cong 2.62679 \end{aligned}$$

blir konfidensintervallet $\overline{x} - \overline{y} \pm t_{0.05/2}(8)\cdot\sigma_{\text{obs}}^*\cdot\sqrt{1/5 + 1/5}$. Tabell över $t$-fördelningen ger $t_{0.05/2}(8) = 2.306004135204$. Innsättning ger då konfidensintervallet

$$23.4 - 27 \pm 2.306004135204 \cdot 2.62679 \cdot \sqrt{2/5} = -3.6 \pm 3.83102$$

dvs. $[-7.44, 0.24]$. Lägg märka till att 0 tillhör intervallet, så man kan inte påstå att det finns en skillnad i nikotinhalten i de två tobakssorter.

**6.** **a)** Vi har

$$E\left(\xi_1^2\right) = E(\xi_1)^2 + \left(E\left(\xi_1^2\right) - E(\xi_1)^2\right) = E(\xi_1)^2 + V(\xi_1) = a^2 + \sigma^2.$$

Samma beräkning ger $E\left(\xi_2^2\right) = a^2 + \sigma^2$. Dermed gäller (med användning av Sats 5A)

$$E(T_a^*) = E\left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{2}\right) = \tfrac{1}{2}E\left(\xi_1^2\right) + \tfrac{1}{2}E\left(\xi_2^2\right) = \tfrac{1}{2}(a^2 + \sigma^2) + \tfrac{1}{2}(a^2 + \sigma^2) = a^2 + \sigma^2.$$

Dermed är $E(T_a^*) \neq T$, dvs. $T_a^*$ är inte väntevärdesriktig.

**b)** Enligt ledningen gäller

$$E(T_b^*) = E(\xi_1 \cdot \xi_2) = E(\xi_1) \cdot E(\xi_2) = a \cdot a = a^2.$$

Dermed är $E(T_b^*) = T$, dvs. $T_b^*$ är väntevärdesriktig.

**c)** Enligt a) och b) gäller

$$\begin{aligned}
E(T_c^*) &= E\left(\left(\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right)^2\right) \\
&= E\left(\tfrac{1}{4}\xi_1^2 + \tfrac{1}{4}\xi_2^2 + \tfrac{1}{2}\xi_1 \cdot \xi_2\right) \\
&= \frac{1}{4}E\left(\xi_1^2\right) + \frac{1}{4}E\left(\xi_2^2\right) + \frac{1}{2}E(\xi_1 \cdot \xi_2) \\
&= \frac{1}{4}(a^2+\sigma^2) + \frac{1}{4}(a^2+\sigma^2) + \frac{1}{2}(a^2) \\
&= a^2 + \tfrac{1}{2}\sigma^2.
\end{aligned}$$

Dermed är $E(T_c^*) \neq T$, dvs. $T_c^*$ är inte väntevärdesriktig.

**d)** Man bör välja $T_b^*$ då den är väntevärdesriktig. Båda $T_a^*$ och $T_c^*$ överskattar arean.