1. Vi vet att $P(\text{styrbord}) = 0.05$, $P(\text{babord}) = 0.03$ och $P(\text{styrbord} \cap \text{babord}) = 0.01$.

   Observera att styrbord och babord *inte* är oberoende av varandra. Det ser man enklast genom att $P(\text{styrbord} \cap \text{babord}) = 0.01 \neq P(\text{styrbord}) \cdot P(\text{babord}) = 0.05 \cdot 0.03 = 0.0015$.

   (a) $P(\text{minst en}) = P(\text{styrbord} \cup \text{babord}) = P(\text{styrbord}) + P(\text{babord}) - P(\text{styrbord} \cap \text{babord}) =$
   $= 0.05 + 0.03 - 0.01 = 0.07$.

   (b) Definitionen på betingad sannolikhet ger

$$P(\text{styrbord} \mid \text{styrbord} \cup \text{babord}) = \frac{P(\text{styrbord} \cap (\text{styrbord} \cup \text{babord}))}{P(\text{styrbord} \cup \text{babord})} =$$
$$= \frac{P(\text{styrbord})}{P(\text{styrbord} \cup \text{babord})} = \frac{0.05}{0.07} = 0.714.$$

   (c) $P(\text{precis en}) = P(\text{minst en}) - P(\text{båda}) = P(\text{styrbord} \cup \text{babord}) - P(\text{styrbord} \cap \text{babord}) =$
   $= 0.07 - 0.01 = 0.06$.

2. (a) Med $\xi =$ ”antal defekta” $\in Bin(n, p) = Bin(10, 0.2)$ får vi

$$P(\xi \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} p_\xi(k) = \binom{10}{0} 0.2^0 (1-0.2)^{10} + \binom{10}{1} 0.2^1 (1-0.2)^{10-1} =$$
$$= 0.8^{10} + 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8^9 = 0.376.$$

   (b) Med $\xi =$ ”antal hål” $\in Po(\lambda) = Po(2)$ får vi

$$P(\xi = 0) = p_\xi(0) = \mathrm{e}^{-2}\frac{2^0}{0!} = \mathrm{e}^{-2} = 0.135.$$

   (c) Med $\xi =$ ”livslängd” $\in Exp(\lambda) = Exp(1/4)$ får vi

$$P(\xi > 5) = \int_5^\infty f_\xi(x)\,dx = \int_5^\infty \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x/4}\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-x/4}\right]_5^\infty = 0 + \mathrm{e}^{-5/4} = 0.287.$$

3. (a) $P(\xi < 650) = \Phi(\frac{650 - 800}{50}) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$.

   (b) Eftersom ξ och η är oberoende och normalfördelade med
   $E(\eta - \xi) = E(\eta) - E(\xi) = 900 - 800 = 100$ och
   $V(\eta - \xi) = V(\eta) + (-1)^2 V(\xi) = 60^2 + 50^2 = 6100$ så är
   $\eta - \xi \in N\left(100,\ \sqrt{6100}\right) = N(100,\ 78.1)$, vilket ger

$$P(\eta - \xi > 150) = 1 - \Phi(\frac{150 - 100}{78.1}) = 1 - \Phi(0.64) = 1 - 0.7389 = 0.2611.$$

4. (a) Vi har att

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{3} k \cdot p_\xi(k) = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.1 = 1.6,$$

$$\begin{aligned} V(\xi) &= E(\xi^2) - E^2(\xi) = \sum_{k=0}^{3} k^2 \cdot p_\xi(k) - 1.6^2 = \\ &= 0^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.5 + 3^2 \cdot 0.1 - 1.6^2 = 3.2 - 1.6^2 = 0.64, \\ \sigma &= \sqrt{V(\xi)} = \sqrt{0.64} = 0.8. \end{aligned}$$

(b) Eftersom ξ_i = ”antal gasoltuber som används dag i”, $i = 1, \ldots, n$, är oberoende av varandra och har samma fördelning med $E(\xi) = \mu = 1.6$ och $\sigma = 0.8$, och där $n = 250$ är stort, kan vi normalapproximera summan enligt Centrala gränsvärdessatsen.

Med $E(\sum_{i=1}^{250} \xi_i) = \sum_{i=1}^{250} E(\xi_i) = 250\mu$ och $V(\sum_{i=1}^{250} \xi_i) = \sum_{i=1}^{250} V(\xi_i) = 250\sigma^2$ har vi alltså

$$\sum_{i=1}^{250} \xi_i \underset{\sim}{\in} N\left(250\mu,\ \sigma\sqrt{250}\right) = N\left(250 \cdot 1.6,\ 0.8\sqrt{250}\right) = N(400,\ 12.6)$$

$$P(\sum_{i=1}^{250} \xi_i > 425) \approx 1 - \Phi(\frac{425 - 400}{12.6}) = 1 - \Phi(1.98) = 1 - 0.9761 = 0.0239.$$

5. Som man kan se i figuren varierar vattenstånden i både Klagshamn och Barsebäck från år till år. Men de följer varandra, de beror ju på samma väder, och de parvisa skillnaderna mellan dem, samma år, varierar betydligt mindre. Det betyder att stickprov i par är en lämplig modell, dvs oberoende observationer av ζ_i = ”skillnaden år i” $\in N(\Delta,\ \sigma_z)$, $i = 1, \ldots, n$ där $n = 25$.

Vi skattar Δ med $\Delta^* = \bar{z} = 2.12$ och σ_z med $\sigma_z^* = s_z = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n-1}} = 1.58$ som har $f = n - 1 = 25 - 1 = 24$ frihetsgrader.

Vi har att $\Delta^* = \bar{\zeta} \in N\left(\Delta,\ \frac{\sigma_z}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\Delta,\ \frac{\sigma_z}{\sqrt{25}}\right)$ och skattar $\frac{\sigma_z^*}{\sqrt{25}} = \frac{1.58}{\sqrt{25}} = 0.316$.

Ett 95 % konfidensintervall för Δ ges då av

$$I_\Delta = \left(\Delta^* \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s_z}{\sqrt{n}}\right) = (2.12 \pm \underbrace{t_{0.025}(24)}_{2.064} \cdot 0.316) = (1.47,\ 2.77) \text{ cm}.$$

6. Vi har $n_1 = 6$ oberoende observationer, $x_1, \ldots, x_6$ från ξ = ”resultat från Lab A” $\in N(\mu_1,\ \sigma)$ och $n_2 = 5$ oberoende observationer, $y_1, \ldots, y_5$ från η = ”resultat från Lab B” $\in N(\mu_2,\ \sigma)$. Vi vill testa H_0: $\mu_1 = \mu_2$ mot H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ på signifikansnivå, t.ex., $\alpha = 5$ %.

Skattningar: $\mu_1^* = \bar{x} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} x_i = 445.2, \quad \mu_2^* = \bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} y_i = 425.8,$

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{6-1} \sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})^2} = 16.6, \quad s_2 = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^{5} (y_i - \bar{y})^2} = 16.3.$$

Den gemensamma σ-skattningen blir $\sigma^* = s = \sqrt{\dfrac{(6-1)\cdot 16.6^2 + (5-1)\cdot 16.3^2}{6-1+5-1}} = 16.5$ med $f = 6-1+5-1 = 9$ frihetsgrader.

Differensen $\mu_1 - \mu_2$ skattas med $\bar{x} - \bar{y} = 445.2 - 425.8 = 19.4$ där $\mu_1^* - \mu_2^* \in N\left(\mu_1 - \mu_2,\ \sigma\sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5}}\right)$

Eftersom 95 % konfidensintervallet

$$I_{\mu_1-\mu_2} = (\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(f)\cdot s\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}) = (19.4 \pm \underbrace{t_{0.025}(9)}_{2.26} \cdot 16.5\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}) = (-3.2,\ 41.9)$$

innehåller 0 kan H_0 inte förkastas på signifikansnivån 5 %. Det finns inte någon signifikant skillnad mellan laboratorierna.