LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **Linjär algebra**
Helsingborg **2019-06-07**

1. a) Arean blir $|\bar{u}\times\bar{w}| = |(-3,0,-4)\times(0,2,1)| = |(8,3,-6)| = \sqrt{109}$ a.e.

b) $V=\begin{vmatrix}-3 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ -4 & -1 & 1\end{vmatrix} = (\text{utv. efter rad } 2) = 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-3 & -7\\ -4 & -1\end{vmatrix} = -2(3-28) = 50$ v.e.

c) Den ena komposanten bestämmer vi som ortogonal projektion av $\bar{a}=(2,1,-1)$ på

$\bar{w}=(0,2,1)$. $\bar{a}_1 = \dfrac{(2,1,-1)\cdot(0,2,1)}{0^2+2^2+1^2}(0,2,1) = \dfrac{1}{5}(0,2,1)$.

Den andra komposanten fås ur

$\bar{a}=\bar{a}_1+\bar{a}_2 \Leftrightarrow \bar{a}_2=\bar{a}-\bar{a}_1=(2,1,-1)-\dfrac{1}{5}(0,2,1)=\dfrac{1}{5}(10,3,-6)$.

2. a) Eftersom planet π_1 är ortogonalt mot linjen L kan $\bar{v}$ väljas som normalvektor till π_1.

Vi får $\pi_1: x-y+z+d=0$. För att bestämma d sätt in t.ex. $(3,2,0)$ i π_1

$3-2+0+d=0 \Leftrightarrow d=-1$. Planets ekvation blir $\pi_1: x-y+z-1=0$.

b) Sätt L in i π_2: $(1+t)-t+2(3+t)-1=0 \Leftrightarrow t=-3$.
Insättningen av $t=-3$ i L ger skärningspunkten $(-2,3,0)$.

c) Vinkeln θ mellan π_1 och π_2 är vinkeln mellan $\bar{n}_1=(1,-1,1)$ och $\bar{n}_2=(1,1,2)$.

$$\cos\theta=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}=\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3. a) $\begin{vmatrix}x & 1 & x-1\\ 1 & x-2 & x-1\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2(x-1)(3-x)=0 \Leftrightarrow x=1$ eller $x=3$.

b) $XA=B \Leftrightarrow X=BA^{-1}$.

Vi bestämmer A^{-1}:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = y_1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = y_2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 2x_3 = y_1 \\ x_1 = y_1 + y_2 \\ -x_1 + x_3 = 2y_1 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = 3y_1 + 2y_3 \\ x_3 = 3y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}.$$

d.v.s. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

4. a) Den linjära avbildning, som vrider planets punkter vinkeln $\frac{\pi}{4}$ i negativ led runt origo, ges av matrisen: A.

Basvektorn $\bar{e}_x$ avbildas på $F(\bar{e}_x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ är kolonn1 i A

Basvektorn $\bar{e}_y$ avbildas på $F(\bar{e}_y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ är kolonn2 i A

Vi får $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Linjen $(x, y) = (3t, -t)$ har riktningsvektorn $\bar{v} = (3, -1)$ som genom vridning övergår i

$A \cdot \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, dvs i vektorn $\sqrt{2} \cdot (1, -2)$

Som riktningsvektorn för den nya linjen kan vi ta $(1, -2)$.

Linjen $(x, y) = (3t, -t)$ övergår i linjen $(x, y) = (t, -2t)$.

c) Svar: Vid vridningen förändras inte triangelns arae, så Arean av T_2= Arean av $T_1 = 4$.

ALT: Arean av T_1 A_{T_1} = 4 ae. För att bestämma arean av bildtriangeln T_2 använder vi (s. 216-218 i boken)

$A_{T_2} = |\det A| \cdot A_{T_1}$, där A är avbildningsmatrisen som svarar mot vridning vinkeln $\frac{\pi}{4}$ i negativ led runt origo.

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1. \text{ Vi får } A_{T_2} = |\det A| \cdot A_{T_1} = 4 \text{ ae.}$$

5. Vi bestämmer linjens ekvation genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-3y+3z=2 \\ 3x-5y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=1 \\ y-2z=-1 \\ -y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=1 \\ y-2z=-1 \\ 0=0 \end{cases}. \quad \text{Med } z=t \text{ får vi}$$

$$L: \begin{cases} x=-1+3t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases}. \text{ Linjens riktningsvektor: } \bar{v}=(3,2,1).$$

Tag en punkt på linjen, t.ex. $P_0:(-1,-1,0)$ och bilda vektorn $\bar{u}=\overrightarrow{P_0P}=(3,-2,2)$.

Vektorn $\bar{u}_1$är projektionen av $\bar{u}$ på linjens riktningsvektor $\bar{v}$.

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\bar{v} = \frac{9-4+2}{14}(3,2,1) = \frac{1}{2}(3,2,1).\ \bar{u}_2 = \bar{u}-\bar{u}_1 = (3,-2,2)-\frac{1}{2}(3,2,1) = \frac{3}{2}(1,-2,1).$$

Avståndet d mellan linjen L och punkten P är: $d=|\bar{u}_2| = \frac{3}{2}\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

6. Punkterna $A:(2,1,1)$ och $B:(1,2,2)$ ligger i planet π. Bilda vektorn $\bar{u}=\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$.

Vi tar en vektor parallell med z-axeln t.ex. $\bar{v}=(0,0,1)$.

En normalvektor till planet π ges då av vektorn $\bar{n}=\bar{u}\times\bar{v}=(-1,1,1)\times(0,0,1)=(1,1,0)$

och planets ekvation kan skrivas $\pi: x+y+d=0$.

För att bestämma d sätt in t.ex. $A:(2,1,1)$ i π. Vi får $2+1+d=0 \Leftrightarrow d=-3$.

Planets ekvation blir $\pi: x+y-3=0$.

Vi ska nu spegla en godtycklig punkt $P:(0,0,t)$, $t \in \mathbb{R}$ på z-axeln i planet π .

Tag en punkt t.ex. $P_0:(3,0,0)$ (det går lika bra med A eller B).

Vi får $\bar{u} = \overrightarrow{P_0P} = (-3, 0, t)$ .Vektorn $\bar{u}'$ är projektionen av $\bar{u}$ på planets normalvektor $\bar{n}$.

Projektionsformeln ger

$$\bar{u}' = \frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n} = \frac{(-3,0,t)\cdot(1,1,0)}{2}(1,1,\ 0) = \frac{-3}{2}(1,1,\ 0).$$

Det finns två sätt att fortsätta lösningen.

Alt.1: Man bestämmer spegelbilden $\overrightarrow{P_0S}$ av vektorn $\bar{u} = \overrightarrow{P_0P}$ som

$$\overrightarrow{P_0S} = \bar{u} - 2\bar{u}' = (-3, 0, t) - 2\cdot\frac{(-3)}{2}(1,1,0) = (0,3,t) \ .$$

Om O är origo så får man att

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0S} = (3,0,0) + (0,3,t) = (3,3,t)$$

Spegelbilden är punkten $S : (3,\ 3, t)$.

Alt.2: (Rekommenderas)

Om O är origo så får man direkt att $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} - 2\bar{u}' = \ldots = (3,\ 3, t)$.

Svar: $(3,\ 3, t)$.