LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **SVAR OCH ANVISNINGAR**
MATEMATIK **Linjär algebra**
Helsingborg **2019-05-02**

1. a) Sätt $L_1 = L_2$

$$\begin{cases} -4+3t=16+s \\ 1+2t=1-s \\ -1-t=3+s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-s=20 \\ 2t+s=0 \\ -t-s=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t-s=20 \\ 5t=20 \\ 4t=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ s=-8 \end{cases}$$

$t=4$ insatt i L_1 ger skärningspunkten $(8, 9, -5)$.

b) Vi löser ett ekvationssystem

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-3y-z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=1 \\ y-3z=-7 \end{cases}.$$ Sätt $z=t$.

Då får vi skärningslinjen $L:\begin{cases} x=-13+5t \\ y=-7+3t \\ z=t \end{cases}$.

2. $AX+X=B^T \Leftrightarrow (A+I)X=B^T \Leftrightarrow X=(A+I)^{-1}\cdot B^T$.

$B^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A+I=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ och $(A+I)^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$X=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Vi bestämmer först planets ekvation på formen $ax+by+cz+d=0$.

$$\bar{v}_1\times\bar{v}_2=(1,2,-2)\times(2,2,-3)=\left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right)=(-2,-1,-2).$$

Som normalvektor kan vi ta $\bar{n}=(2,1,2) \Rightarrow \pi: 2x+y+2z+d=0$.

Insättningen av punkten $(2,3,3)$ i π ger d: $2\cdot 2+3+2\cdot 3+d=0 \Leftrightarrow d=-13$.

Planets ekvation är $2x+y+2z-13=0$.

Enligt avståndsformeln (s.78) får vi $\rho=\dfrac{|2\cdot 0+1+2\cdot 1-13|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{10}{3}$.

4. a) $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 0$. Vi får $(1, a, -1) \cdot (4, -1, 2) = 0 \Leftrightarrow 4 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

b) $A = \frac{1}{2}|\bar{v} \times \bar{w}| = \frac{1}{2}|(1, -2, -3)| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14}$ a.e.

c) $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ är lin.oberoende $\Leftrightarrow \det(\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}) \neq 0$. Vi testar med determinant:

$$\det(\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$ dvs vektorerna är linjärt beroende.

5. a) Linjens (ljusstrålens) ekvation är $L_1 : (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(1, 0, 2)$.
För att bestämma skärningen sätt in L_1 i π: $1 + t - 2 + 1 + 2t - 6 = 0 \Leftrightarrow 3t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.
Skärningspunkten är $Q : (3, 2, 5)$.

b) Som riktningsvektorn för den reflekterade ljusstrålen kan väljas $\overrightarrow{SQ}$, där punkten S är spegelpunkten av $P : (1, 2, 1)$ i planet π. Sätt $\bar{u} = \overrightarrow{QP} = (-2, 0, -4)$.
$\overrightarrow{QS} = \bar{u} - 2\bar{u}'$ och $\bar{u}'$ är projektionen av $\bar{u}$ på $\bar{n} = (1, -1, 1)$. Projektionsformeln ger

$$\bar{u}' = \frac{\bar{u} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n} = \frac{(-2, 0, -4) \cdot (1, -1, 1)}{3}(1, -1, 1) = -2(1, -1, 1).$$

$$\overrightarrow{QS} = (-2, 0, -4) - 2 \cdot (-2)(1, -1, 1) = (2, -4, 0) = 2(1, -2, 0).$$

Ekvationen för den reflekterade ljusstråle (med punkten Q och riktningen $\bar{v} = (1, -2, 0)$)

blir $(x, y, z) = (3, 2, 5) + t(1, -2, 0)$.

6. Sätt $P : (2, 4)$, $Q : (3, 7)$ och $R : (4, 1)$, M är triangelns tyngdpunkt.
$\overrightarrow{OP} = (2, 4)$, $\overrightarrow{OQ} = (3, 7)$, $\overrightarrow{OR} = (4, 1)$ och $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}\right) = \ldots = (3, 4)$.
Vridningen sker kring M. Vi bestämmer först var vektorerna
$\bar{u} = \overrightarrow{MP} = (-1, 0)$, $\bar{v} = \overrightarrow{MQ} = (0, 3)$, $\bar{w} = \overrightarrow{MR} = (1, -3)$ hamnar i efter vridningen.
Matrisen för vridning vinkeln $\frac{3\pi}{4}$ kring origo i positiv led blir (boken s.169)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & -\sin\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vektorerna $\bar{u}, \bar{v}$ och $\bar{w}$ avbildas på

$$\overline{u}' = A\overline{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{v}' = A\overline{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$\overline{w}' = A\overline{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Punkterna P, Q och R avbildas på P', Q' och R'.

Vi får

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OM} + \overline{u}' = (3,4) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OM} + \overline{v}' = \left(3 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\overrightarrow{OR'} = \overrightarrow{OM} + \overline{w}' = \left(3 + \frac{2}{\sqrt{2}}, 4 + \frac{4}{\sqrt{2}}\right) = \left(3 + \sqrt{2},\ 4 + 2\sqrt{2}\right).$$

Svar: Hörnen hamnar i

$$P' : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 4 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ Q' : \left(3 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 4 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ och } R' : \left(3 + \sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}\right).$$