Lunds Tekniska Högskola	**Lösningar**
Matematik	**Linjär Algebra, FMAA55**
Helsingborg	**2021-04-14**

1. a) Planet har riktningsvektorerna

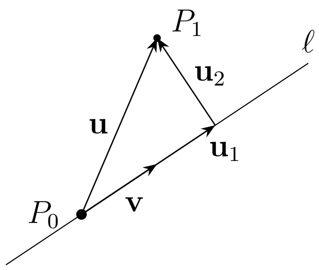
$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \overrightarrow{P_1P_2} = (2-1, -1-0, 1-3) = (1,-1,-2),\\ \mathbf{v}_2 &= \overrightarrow{P_1P_3} = (-1-1, 2-0, -1-3) = (-2,2,-4) = -2(1,-1,2).\end{aligned}$$

En normalvektor är då

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (1,-1,-2) \times (1,-1,2)\\ &= \left(\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right)\\ &= \big(-2-2, -(2-(-2)), -1-(-1)\big)\\ &= (-4,-4,0)\\ &= -4(1,1,0).\end{aligned}$$

Planets ekvation är alltså $x+y+d=0$ för något d. Insättning av P_1 ger $1+0+d=0$, dvs. $d=-1$. Planets ekvation är alltså $x+y=1$.

b) Linjen har riktningsvektor $\mathbf{v} = (1,1,-1)$ och går genom punkten $P_0\colon\ (1,0,2)$.



Vi får då vektorn

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (1-1, 0-0, 3-2) = (0,0,1).$$

Ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$ ges av

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}\\ &= \frac{(0,0,1)\cdot(1,1,-1)}{|(1,1,-1)|^2}(1,1,-1)\\ &= \frac{0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-1)}{1^2+1^2+(-1)^2}(1,1,-1)\\ &= -\tfrac{1}{3}(1,1,-1).\end{aligned}$$

Detta ger

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = (0,0,1) - \big(-\tfrac{1}{3}(1,1,-1)\big) = \tfrac{1}{3}(0+1, 0+1, 3-1) = \tfrac{1}{3}(1,1,2).$$

Minsta avståndet mellan P_1 och linjen är alltså

$$|\mathbf{u}_2| = \tfrac{1}{3}|(1,1,2)| = \tfrac{1}{3}\sqrt{1^2+1^2+2^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

2. Enligt Huvudsatsen är vektorerna är linjärt oberoende precis när

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -a \end{vmatrix} \neq 0.$$

Utveckling av determinanten efter rad 1 ger

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -a \end{vmatrix} &= a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -a \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= a \cdot \big(1 \cdot (-a) - (-1) \cdot 1\big) - \big(1 \cdot (-a) - (-1) \cdot (-1)\big) \\
&\quad + \big(1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)\big) \\
&= a(-a+1) - (-a-1) + 2 \\
&= -a^2 + 2a + 3 \\
&= -(a-3)(a+1).
\end{aligned}$$

Vi har alltså

$$\text{vektorerna är linjärt oberoende} \iff a \neq -1 \text{ och } a \neq 3,$$

$$\text{vektorerna är linjärt beroende} \iff a = -1 \text{ eller } a = 3.$$

3. Låt S beteckna spegling i π. Punkten i π är precis de punkter som inte förändras under spegling. Vi har alltså

$$(x,y,z) \text{ ligger på } \pi \iff S(x,y,z) = (x,y,z) \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff$$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 6x & +3y & -2z & = & 7x \\ 3x & -2y & +6z & = & 7y \\ -2x & +6y & +3z & = & 7z \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x & +3y & -2z & = & 0 \quad (\cdot -1) \\ 3x & -9y & +6z & = & 0 \\ -2x & +6y & -4z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & -3y & +2z & = & 0 \quad -3 \quad 2 \\ 3x & -9y & +6z & = & 0 \\ -2x & +6y & -4z & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & -3y & +2z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0. \end{cases}$$

Planets ekvation är alltså $\pi\colon x - 3y + 2z = 0$. Vi beräkner nu A^{2021}. Då S är en spegling är S^2 identitetsavbildningen, dvs. $S^2(x,y,z) = (x,y,z)$. Detta ger $A^2 = I$. Därför gäller

$$A^{2021} = A^{2020}A^1 = \left(A^2\right)^{1010} A = I^{1010}A = IA = A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Omskrivning av ekvationen ger

$$BX - A = X \iff BX - X = A \iff (B - I)X = A.$$

En standardberäkning vha. Gausselimination ger att

$$B - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

är invertibel med inversen

$$(B - I)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

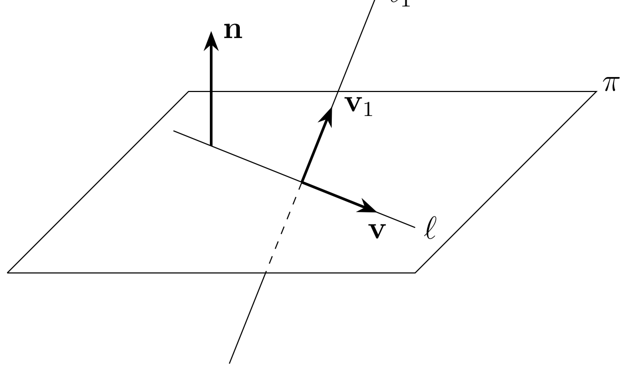
Därmed gäller

$$(B - I)X = A \iff X = (B - I)^{-1}A.$$

Lösningen är alltså

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 11 & -4 & 3 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Om $\mathbf{v}$ är en riktningsvektor för ℓ är $\mathbf{v}$ vinkelrätt mot ℓ_1:s riktningsvektor $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 1)$ och mot π:s normalvektor $\mathbf{n} = (2, 1, -3)$.



Alltså är $\mathbf{v}$ parallell med

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \times \mathbf{n} &= (1, -2, 1) \times (2, 1, -3) \\
&= \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&= \big(6 - 1, -(-3 - 2), 1 - (-4)\big) \\
&= (5, 5, 4) \\
&= 5(1, 1, 1).
\end{aligned}$$

Dessutom går ℓ genom skärningspunkten av ℓ_1 och π. Detta bestäms genom insättning av ℓ_1:s ekvation i π:s ekvation:

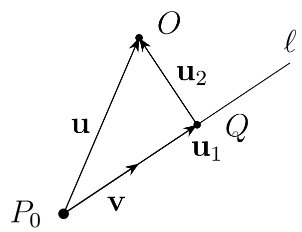
$$2(3+t)+(8-2t)-3(2+t) = 2 \iff 6+2t+8-2t-6-3t = 2 \iff 8-3t = 2 \iff t = 2.$$

Skärningspunkten blir alltså $(3 + 2, 8 - 2 \cdot 2, 2 + 2) = (5, 4, 4)$. Linjen ℓ har alltså riktningsvektor $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ och går genom punkten $(5, 4, 4)$ hvilket ger ekvationen $\ell\colon (x, y, z) = (5 + t, 4 + t, 4 + t)$.

6. Låt $P_1(t)\colon (-1 + t, -2 + t, -t)$ och $P_2(t)\colon (3 - t, t, 0)$, $t \geq 0$, beteckna bilernas positioner. För att ta reda på hur nära bilerna kommer till varandra beräknas vektorn mellan bilerna

$$\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)} = \big(3 - t - (-1 + t), t - (-2 + t), 0 - (-t)\big) = (4 - 2t, 2, t).$$

Avståndet mellan bilerna är alltså samma som avståndet från $O\colon (0, 0, 0)$ till halvlinjen $\ell\colon (x, y, z) = (4 - 2t, 2, t)$, $t \geq 0$. Denna halvlinje börjar i punkten $P_0\colon (4, 2, 0)$ och har riktningsvektorn $\mathbf{v} = (-2, 0, 1)$.



Från figuren erhålls att $\mathbf{u}_1$ är ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0O}$ på $\mathbf{v}$. Vektorn $\mathbf{u}$ ges av

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0O} = (0 - 4, 0 - 2, 0 - 0) = (-4, -2, 0).$$

Observera att

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-4, -2, 0) \cdot (-2, 0, 1) = (-4) \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 8 > 0.$$

Vinkeln mellan $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0O}$ och ℓ är alltså spetsig och figuren ovan är korrekt. Minsta avståndet ges alltså av $|\overrightarrow{OQ}|$. (Om vinkeln hade varit trubbig, hade minsta avståndet varit $|\overrightarrow{OP_0}|$.) Beräkning ger nu

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \\
&= \frac{(-4,-2,0)\cdot(-2,0,1)}{|(-2,0,1)|^2}(-2,0,1) \\
&= \frac{(-4)\cdot(-2)+(-2)\cdot 0+0\cdot 1}{(-2)^2+0^2+1^2}(-2,0,1) \\
&= \tfrac{8}{5}(-2,0,1) \\
&= \tfrac{1}{5}(-16,0,8),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}-\mathbf{u}_1 \\
&= (-4,-2,0)-\tfrac{1}{5}(-16,0,8) \\
&= \tfrac{1}{5}\big(-20-(-16),-10-0,0-8\big) \\
&= \tfrac{1}{5}(-4,-10,-8).
\end{aligned}$$

Minsta avståndet mellan bilerna är alltså

$$|\mathbf{u}_2| = \tfrac{1}{5}|(-4,-10,-8)| = \tfrac{1}{5}\sqrt{(-4)^2+(-10)^2+(-8)^2} = \tfrac{1}{5}\sqrt{180} = \tfrac{6}{5}\sqrt{5}.$$

Alternativ metod. Som ovan gäller $\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)} = (4-2t,2,t)$. Avståndet mellan bilerna i kvadrat är alltså

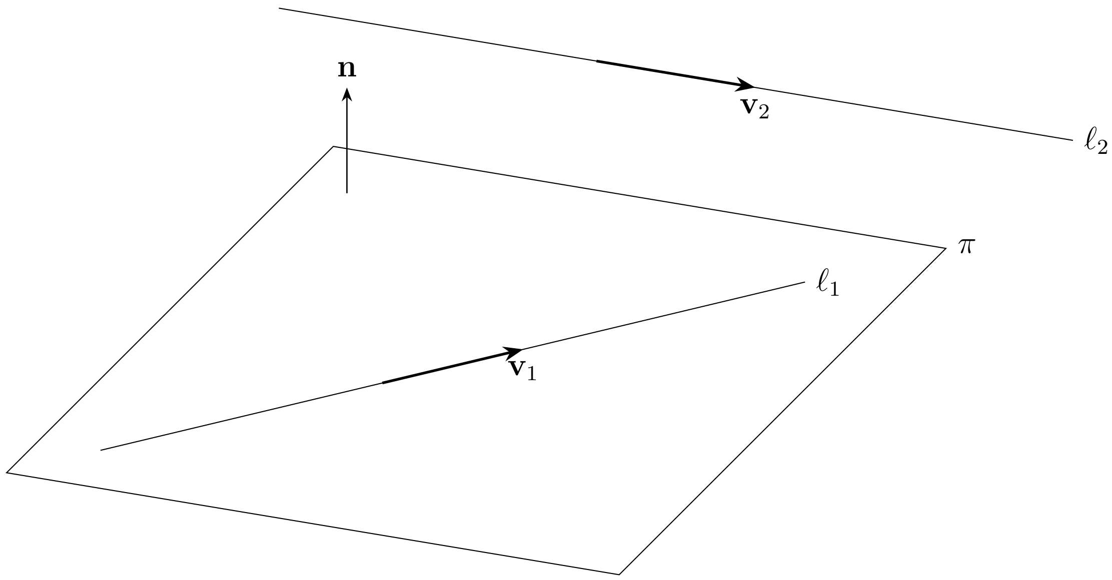
$$|\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)}|^2 = |(4-2t,2,t)|^2 = (4-2t)^2+2^2+t^2 = 16+4t^2-16t+4+t^2 = 5t^2-16t+20.$$

Kvadratkomplettering ger

$$5t^2-16t+20 = 5\left(t^2-\tfrac{16}{5}t\right)+20 = 5\left(\left(t-\tfrac{8}{5}\right)^2-\left(\tfrac{8}{5}\right)^2\right)+20 = 5\left(t-\tfrac{8}{5}\right)^2+\tfrac{36}{5}.$$

Då minimum finns för $t=\frac{8}{5}\geq 0$ är minsta avståndet mellan bilerne alltså $\sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Längden av kortast möjliga tunneln är samma som minsta avståndet mellan linjerna $\ell_1\colon (x,y,z) = (-1+t,-2+t,-t)$ och $\ell_2\colon (x,y,z) = (3-t,t,0)$. Dessa har riktningsvektorerna $\mathbf{v}_1 = (1,1,-1)$ och $\mathbf{v}_2 = (-1,1,0)$ respektiva. Då dessa inte är parallella finns ett entydigt bestämd plan π så att ℓ_1 ligger i π och π är parallell med ℓ_2.



Avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 är då samma som avståndet mellan π och ett godtyckligt punkt på ℓ_2. Denna avstånd fås sedan från Avståndsformeln.

Planet har riktningsvektorena $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Då

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (1, 1, -1) \times (-1, 1, 0)\\ &= \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right)\\ &= \big(0 - (-1), -(0 - 1), 1 - (-1)\big)\\ &= (1, 1, 2),\end{aligned}$$

är $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$ en normalvektor till π. Planet har alltså affina ekvationen $\pi\colon x + y + 2z + d = 0$ för något d. Punkten $(-1, -2, 0)$ ligger på ℓ_1 och därmed också på π, vilket ger $(-1) + (-2) + 2 \cdot 0 + d = 0$. Detta ger $d = 3$, dvs. $\pi\colon x + y + 2z + 3 = 0$. Punkten $(3, 0, 0)$ ligger på ℓ_2. Längden av kortast möjliga tunneln är alltså

$$\frac{|3 + 0 + 2 \cdot 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$