Lunds Tekniska Högskola	**Lösningar**
Matematik	**Linjär Algebra, FMAA55**
Helsingborg	**2021-06-04**

1a) Låt $P\colon (2,1,5)$ och $Q\colon (3,4,1)$. Linjen har riktningsvektorn

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (3-2, 4-1, 1-5) = (1,3,-4).$$

En ekvation på parameterform är alltså $\ell\colon (x,y,z) = (2,1,5) + t(1,3,-4)$. Vi har

$$\begin{aligned}
(0,1,3) \text{ ligger på } \ell &\iff (0,1,3) = (2,1,5) + t(1,3,-4) \text{ är lösbart} \\
&\iff \begin{cases} 0 = 2+t \\ 1 = 1+3t \\ 3 = 5-4t \end{cases} \quad \text{är lösbart} \\
&\iff \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 1/2 \end{cases} \quad \text{är lösbart.}
\end{aligned}$$

Alltså ligger punkten $(0,1,3)$ *inte* på ℓ.

1b) Då planens normalvektorer $(2,3,-6)$ och $(4,6,-12)$ är parallella, är π_1 och π_2 parallella. Punkten $P_2\colon \left(0,0,\frac{1}{12}\right)$ ligger på π_2 ty $4\cdot 0 + 6\cdot 0 - 12\cdot\frac{1}{12} + 1 = 0$. Avståndsformeln ger nu

$$\begin{aligned}
\text{Avståndet mellan } \pi_1 \text{ och } \pi_2 &= \text{Avståndet mellan } \pi_1 \text{ och } P_2 \\
&= \frac{\left|2\cdot 0 + 3\cdot 0 - 6\cdot\frac{1}{12} + 3\right|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}} \\
&= \frac{|5/2|}{\sqrt{49}} \\
&= \frac{5/2}{7} \\
&= \frac{5}{14}.
\end{aligned}$$

2a) Vi har

$$\overrightarrow{AB} = (4-4, 6-3, 1-4) = (0,3,-3) \quad \text{och} \quad \overrightarrow{AC} = (3-4, 2-3, 6-4) = (-1,-1,2).$$

Alltså gäller

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right| &= |(0,3,-3)| = 3|(0,1,-1)| = 3\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} = 3\sqrt{2}, \\
\left|\overrightarrow{AC}\right| &= |(-1,-1,2)| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6} \quad \text{och} \\
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (0,3,-3)\cdot(-1,-1,2) = 3(0,1,-1)\cdot(-1,-1,2) \\
&= 3\big(0\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 2\big) = 3(0-1-2) = -9.
\end{aligned}$$

Vinkeln $\angle A = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$ bestäms nu av skalärprodukten

$$\begin{aligned}
\cos\left(\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right|} \\
&= \frac{-9}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} \\
&= \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Då $0 \leq \angle A \leq \pi$ gäller alltså $\angle A = \frac{5\pi}{6}$. Triangeln area blir då

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right| \sin(\angle A) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Alternativ: Triangelns area kan också beräknas direkta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| &= \frac{1}{2}\left|(0,3,-3) \times (-1,-1,2)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|3(0,1,-1) \times (-1,-1,2)\right| \\
&= \frac{3}{2}\left|\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right)\right| \\
&= \frac{3}{2}\left|(1,1,1)\right| \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

2b) Linjen ℓ går genom $Q\colon (2,-1,0)$ som därför ligger i det sökta planet π. Vektorn

$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{PQ} = (2-1, -1-2, 0-1) = (1,-3,-1)$$

är alltså parallell med π. Då ℓ:s riktningsvektor $\mathbf{v}_2 = (-2,1,1)$ också är parallell med π är

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \\
&= (1,-3,-1) \times (-2,1,1) \\
&= \left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right) \\
&= (-2,1,-5)
\end{aligned}$$

en normalvektor till π. Planets ekvation är alltså $\pi\colon\ -2x + y - 5z + d = 0$ för något d. Insättning av P ger $-2 \cdot 1 + 2 - 5 \cdot 1 + d = 0$, dvs. $d = 5$. Planets ekvation är alltså $\pi\colon\ -2x + y - 5z + 5 = 0$.

3) Ekvationssystemet har koefficientmatris

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beräkning ger

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \quad -a \\ \\ \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -2 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-2a & 2-a \end{vmatrix} \quad \text{(utveckling efter rad 2)} \\
&= -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & a-2 \\ 1-2a & 2-a \end{vmatrix} + 0 - 0 \\
&= -(a-2) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1-2a & -1 \end{vmatrix} \quad \text{(bryt ut faktorn } a-2 \text{ från kolonn 2)} \\
&= -(a-2)\big(2 - (1-2a)\big) \\
&= -(a-2)(2a+1).
\end{aligned}$$

Alltså gäller

Ekvationssystemet har *inte* entydig lösning $\iff \det A = 0 \iff a = 2$ eller $a = -1/2$.

För $a = 2$ blir ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +2y & +2z & = & 0 \\ x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +y & +2z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +2y & +2z & = & 0 \\ 2x & +y & +2z & = & -1 \end{array}\right. \begin{matrix} -2 \quad -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +z & = & 1 \\ & -2y & & = & -2 \\ & -3y & & = & -3 \end{array}\right. \begin{matrix} \\ -\tfrac{3}{2} \\ \\ \end{matrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +z & = & 1 \\ & -2y & & = & -2 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Återsubstitution ger $z = t$, $y = 1$ och $x = 1 - 2y - z = 1 - 2 \cdot 1 - t = -1 - t$, dvs. $(x, y, z) = (-1 - t, 1, t)$ där $t \in \mathbb{R}$ är en godtycklig parameter.
För $a = -\frac{1}{2}$ blir ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +2y & -\frac{1}{2}z & = & 0 \\ x & +2y & +z & = & 1 \\ -\frac{1}{2}x & +y & +2z & = & -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +2y & -\frac{1}{2}z & = & 0 \\ -\frac{1}{2}x & +y & +2z & = & -1 \end{array}\right. \begin{matrix} -2 \quad \tfrac{1}{2} \\ \\ \\ \end{matrix} \iff$$

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = & 1 \\ & -2y & -\frac{5}{2}z & = & -2 \\ & 2y & +\frac{5}{2}z & = & -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x & +2y & +z & = & 1 \\ & -2y & -\frac{5}{2}z & = & -2 \\ & & 0 & = & -\frac{5}{2} \end{cases}$$

För $a = -\frac{1}{2}$ saknar ekvationssystemet alltså lösning.

4) Omskrivning av ekvationen ger

$$XA + B = BA^{-1} \iff XA = BA^{-1} - B = B(A^{-1} - I) \iff X = B(A^{-1} - I)A^{-1}.$$

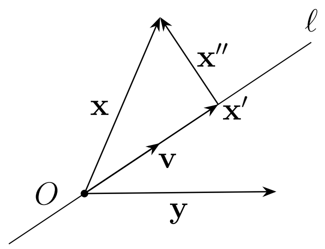
Vi har

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5 \cdot 1 - 3 \cdot 2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Därmed gäller

$$\begin{aligned} X &= B(A^{-1} - I)A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -21 \\ -14 & 36 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 15 \\ 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5) Låt $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beteckna vridning vinkeln $\pi/3$ i positiv led kring origo och låt $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beteckna spegling i linjen $\ell\colon (x, y) = (t, 2t)$. Vi ska då beräkna avbildningsmatrisen för den sammensatta avbildningen $F \circ G$ samt beräkna $(F \circ G)(1, 2)$.
Låt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ vara godtycklig och låt $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$. Linjen har riktningsvektor $\mathbf{v} = (1, 2)$. Beteckna ortogonala projektionen av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{v}$ med $\mathbf{x}'$ och låt $\mathbf{x}'' = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$.



Enligt figuren är $\mathbf{y} = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}'' = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}) = 2\mathbf{x}' - \mathbf{x}$. Projektionsformeln ger

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} \\
&= \frac{(x_1,x_2)\cdot(1,2)}{1^2+2^2}(1,2) \\
&= \frac{x_1+2x_2}{5}(1,2) \\
&= \left(\frac{x_1+2x_2}{5}, \frac{2x_1+4x_2}{5}\right)
\end{aligned}$$

varav

$$\mathbf{y} = 2\mathbf{x}' - \mathbf{x} = 2\left(\frac{x_1+2x_2}{5}, \frac{2x_1+4x_2}{5}\right) - (x_1,x_2) = \left(\frac{-3x_1+4x_2}{5}, \frac{4x_1+3x_2}{5}\right).$$

Alltså gäller

$$Y = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3x_1+4x_2 \\ 4x_1+3x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

varför F är linjär med avbildningsmatris $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Enligt Exempel 8.7 är G linjär med avbildningsmatris

$$B = \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sats 8.4 ger nu att sammensatta avbildningen $F \circ G$ har avbildningsmatris

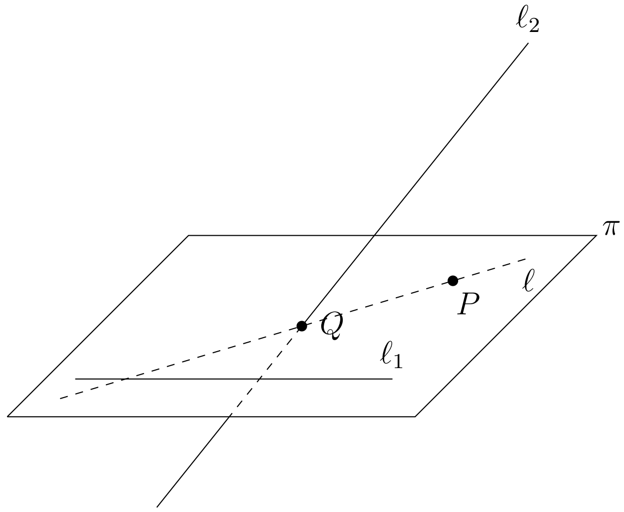
$$AB = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3+4\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} \\ 4+3\sqrt{3} & 3-4\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Då

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3+4\sqrt{3} & 4+3\sqrt{3} \\ 4+3\sqrt{3} & 3-4\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5+10\sqrt{3} \\ 10-5\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gäller $(F \circ G)(1,2) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6) Vi bestämmer först planet π som innehåller P och ℓ_1. Den sökta linjen ℓ måste då gå genom P och skärningspunkten Q mellan π och ℓ_2. Detta bestämmer ℓ.



Punkterna $P\colon (1,-1,-1)$ och $P_1\colon (0,0,2)$ (sätt $t=0$ i ℓ_1:s ekvation) ligger båda i det sökta planet π, så vektorn

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PP_1} = \big(0-1, 0-(-1), 2-(-1)\big) = (-1,1,3)$$

är parallell med π. Då ℓ_1:s riktningsvektor $\mathbf{v}_1 = (1,-2,1)$ också är parallell med π är

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v}_1 \\
&= (-1,1,3) \times (1,-2,1) \\
&= \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) \\
&= (7,4,1)
\end{aligned}$$

en normalvektor till π. Planets ekvation är alltså $\pi\colon 7x+4y+z+d=0$ för något d. Insättning av P ger $7\cdot 1 + 4\cdot(-1) + (-1) + d = 0$, dvs. $d=-2$. Planets ekvation är alltså $\pi\colon 7x+4y+z-2=0$. Vi kan nu bestämma skärningspunkten Q mellan π och ℓ_2. Insättning av ℓ_2 i π:s ekvation ger

$$\begin{aligned}
7x+4y+z-2=0 &\iff 7(3t)+4(-t-1)+(t-2)-2=0 \\
&\iff 21t-4t-4+t-2-2=0 \\
&\iff 18t-8=0 \\
&\iff t = {}^4\!/_9.
\end{aligned}$$

Insättning i ℓ_2:s ekvation ger $Q\colon \big(\frac{4}{3}, -\frac{13}{9}, -\frac{14}{9}\big)$. Då

$$\overrightarrow{PQ} = \big(\tfrac{4}{3}-1, -\tfrac{13}{9}-(-1), -\tfrac{14}{9}-(-1)\big) = \big(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{4}{9}, -\tfrac{5}{9}\big)$$

har ℓ riktningsvektorn $9\overrightarrow{PQ} = (3,-4,-5)$. En parameterekvation för ℓ är alltså

$$\ell\colon (x,y,z) = (1,-1,-1) + t(3,-4,-5).$$

Alternativ: Den sökta linjen ℓ måste gå genom punkterna

$$P\colon (1,-1,-1), \quad R_1\colon (t_1, -2t_1, t_1+2) \quad \text{och} \quad R_2\colon (3t_2, -t_2-1, t_2-2)$$

för några reella tal t_1 och t_2. Vektorerna $\overrightarrow{PR_1}$ och $\overrightarrow{PR_2}$ måste alltså vara parallella. Vi har

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PR_1} \parallel \overrightarrow{PR_2} &\iff \overrightarrow{PR_1} \times \overrightarrow{PR_2} = \mathbf{0} \\
&\iff \big(t_1 - 1, -2t_1 - (-1), t_1 + 2 - (-1)\big) \times \\
&\qquad\qquad \big(3t_2 - 1, -t_2 - 1 - (-1), t_2 - 2 - (-1)\big) = \mathbf{0} \\
&\iff (t_1 - 1, -2t_1 + 1, t_1 + 3) \times (3t_2 - 1, -t_2, t_2 - 1) = \mathbf{0} \\
&\iff \left(\begin{vmatrix} -2t_1 + 1 & t_1 + 3 \\ -t_2 & t_2 - 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} t_1 - 1 & t_1 + 3 \\ 3t_2 - 1 & t_2 - 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t_1 - 1 & -2t_1 + 1 \\ 3t_2 - 1 & -t_2 \end{vmatrix} \right) = \mathbf{0} \\
&\iff \begin{cases} (-2t_1t_2 + 2t_1 + t_2 - 1) - (-t_1t_2 - 3t_2) & = 0 \\ -(t_1t_2 - t_1 - t_2 + 1) + (3t_1t_2 - t_1 + 9t_2 - 3) & = 0 \\ (-t_1t_2 + t_2) - (-6t_1t_2 + 2t_1 + 3t_2 - 1) & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -t_1t_2 + 2t_1 + 4t_2 - 1 & = 0 \\ 2t_1t_2 + 10t_2 - 4 & = 0 \\ 5t_1t_2 - 2t_1 - 2t_2 + 1 & = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Första ekvationen ger

$$t_1t_2 = 2t_1 + 4t_2 - 1. \tag{1}$$

Insättning i de två sista ekvationer ger

$$\begin{cases} 2(2t_1 + 4t_2 - 1) + 10t_2 - 4 & = 0 \\ 5(2t_1 + 4t_2 - 1) - 2t_1 - 2t_2 + 1 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4t_1 & +18t_2 & = & 6 \\ 8t_1 & +18t_2 & = & 4 \end{cases} \xrightarrow{-2}$$

$$\iff \begin{cases} 4t_1 & +18t_2 & = & 6 \\ & -18t_2 & = & -8 \end{cases}$$

Återsubstitution ger $t_2 = \frac{4}{9}$ och $4t_1 = 6 - 18t_2 = 6 - 18 \cdot \frac{4}{9} = -2$ varav $t_1 = -\frac{1}{2}$. Vi kontrollerar att (1) stämmer

$$\mathrm{VL} = t_1t_2 = \tfrac{4}{9} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{2}{9}, \qquad \mathrm{HL} = 2t_1 + 4t_2 - 1 = 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) + 4 \cdot \tfrac{4}{9} - 1 = \tfrac{16}{9} - 2 = -\tfrac{2}{9}.$$

Alltså ligger de tre punkterna P, R_1 och R_2 på linje om $(t_1, t_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{9}\right)$. Insättning ger $R_1\colon \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$ och $R_2\colon \left(\frac{4}{3}, -\frac{13}{9}, -\frac{14}{9}\right)$. Då

$$\overrightarrow{PR_1} = \left(-\tfrac{1}{2} - 1, 1 - (-1), \tfrac{3}{2} - (-1)\right) = \left(-\tfrac{3}{2}, 2, \tfrac{5}{2}\right)$$

har ℓ riktningsvektorn $2\overrightarrow{PR_1} = (-3, 4, 5)$. En parameterekvation för ℓ är alltså

$$\ell\colon (x, y, z) = (1, -1, -1) + t(-3, 4, 5).$$