LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **Linjär algebra, FMAA55**
Helsingborg **2022-04-27**

1. **a)** Linjen ℓ har riktningsvektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (4-(-1), 2-0, 6-1) = (5,2,5)$, så en ekvation på parameterform är $\ell\colon (x,y,z) = (-1+5t, 2t, 1+5t)$.

b) Planet π har riktningsvektorerna $\overrightarrow{P_1P_2} = (0-1, 4-1, 2-1) = (-1,3,1)$ och $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1-1, 3-1, 7-1) = (-2,2,6) = 2(-1,1,3)$. Då $(-1,3,1)\times(-1,1,3) = (8,2,2) = 2(4,1,1)$ är vektorn $\mathbf{n} = (4,1,1)$ alltså en normalvektor till π. Detta ger ekvationen $\pi\colon 4x+y+z+d = 0$ för något d. Insättning av P_1 ger $4\cdot 1+1+1+d = 0$ varav $d = -6$. Planet har alltså ekvationen $\pi\colon 4x+y+z-6 = 0$.

c) Enligt **a)** har linjen ℓ riktningsvektorn $\mathbf{v} = (5,2,5)$ och enligt **b)** har planet π normalvektorn $\mathbf{n} = (4,1,1)$. Vinkeln $[\mathbf{v},\mathbf{n}]$ ges enligt definitionen av skalärprodukten av

$$\begin{aligned}\cos([\mathbf{v},\mathbf{n}]) &= \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{v}||\mathbf{n}|} = \frac{(5,2,5)\cdot(4,1,1)}{\sqrt{5^2+2^2+5^2}\sqrt{4^2+1^2+1^2}} = \frac{5\cdot 4+2\cdot 1+5\cdot 1}{\sqrt{25+4+25}\sqrt{16+1+1}} \\ &= \frac{20+2+5}{\sqrt{54}\sqrt{18}} = \frac{27}{3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Detta ger $[\mathbf{v},\mathbf{n}] = \frac{\pi}{6}$. Minsta vinkeln mellan ℓ och π är därför $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

2. **a)** Punkten $P_0\colon (0,0,3)$ ligger i π då $2\cdot 0+0-3+3 = 0$. En normalvektor till planet är $\mathbf{n} = (2,1,-1)$. Låt $\mathbf{u}'$ vara ortogonala projektionen av $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P}$ på $\mathbf{n}$. Vi har $\mathbf{u} = (1-0, 1-0, 4-3) = (1,1,1)$ och projektionsformeln ger

$$\mathbf{u}' = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}\right)\mathbf{n} = \left(\frac{(1,1,1)\cdot(2,1,-1)}{2^2+1^2+(-1)^2}\right)\mathbf{n} = \tfrac{2}{6}\mathbf{n} = \tfrac{1}{3}(2,1,-1).$$

Låt S vara spegelbilden av P i π. Då gäller $\overrightarrow{PS} = -2\mathbf{u}' = -\frac{2}{3}(2,1,-1)$. Ortsvektorn för S blir alltså

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} = (1,1,4) - \tfrac{2}{3}(2,1,-1) = \tfrac{1}{3}(-1,1,14).$$

Ortogonala projektionen är alltså $S\colon \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

b) Med beteckningar som i **a)**, gäller att avståndet mellan P och π ges av längden av $\mathbf{u}'$. Avståndet är alltså $|\mathbf{u}'| = \frac{1}{3}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

3. Determinanten av ekvationssystemets koefficientmatris är (utveckling efter rad 1):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} &= a\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} \\ &= a\cdot(1-a) + (1-(-1)) + (a-(-1)) \\ &= a - a^2 + 2 + a + 1 \\ &= -a^2 + 2a + 3 = -(a+1)(a-3).\end{aligned}$$

Enligt Huvudsatsen finns alltså entydig lösning när $a \notin \{-1, 3\}$. För $a = -1$ och $a = 3$ finns antigen ingen eller oändligt många lösningar. Vi betraktar nu dessa fall. För $a = -1$ gäller

$$\begin{cases} -x & -y & +z = & 2 \\ x & +y & +z = & 0 \\ -x & -y & +z = & 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -x & -y & + \ z = & 2 \\ & & 2z = & 2 \\ & & 0 = & 0 \end{cases}$$

vilket ger oändligt många lösningar: $(x, y, z) = (-1 - t, t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

För $a = 3$ gäller

$$\begin{cases} 3x & - \ y & +z = & 6 \\ x & + \ y & +z = & 4 \\ -x & +3y & +z = & 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & + \ y & +z = & 4 \\ 3x & - \ y & +z = & 6 \\ -x & +3y & +z = & 2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x & + \ y & + \ z = & 4 \\ & -4y & -2z = & -6 \\ & 4y & +2z = & 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x & + \ y & + \ z = & 4 \\ & -4y & -2z = & -6 \\ & & 0 = & 0 \end{cases}$$

vilket ger oändligt många lösningar: $(x, y, z) = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}t, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Samlat fås alltså:

- $a \notin \{-1, 3\}$: Entydig lösning.
- $a = -1$ och $a = 3$: Oändligt många lösningar.

4. **a)** Från figuren ses direkt att $\mathbf{u} = (2, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1)$, $F(\mathbf{u}) = (2, -1)$ och $F(\mathbf{v}) = (-2, 2)$.

b) Enligt uppgiften uppfyllar avbildningsmatrisen A villkoren

$$\mathsf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathsf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dessa villkor är ekvivalenta med matrisekvationen

$$\mathsf{A}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi har alltså $\mathsf{AB} = \mathsf{C}$ där $\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Då

$$\det \mathsf{B} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2 \neq 0,$$

är B inverterbar. Då gäller $\mathsf{AB} = \mathsf{C} \iff \mathsf{A} = \mathsf{CB}^{-1}$. Avbildningsmatrisen är alltså

$$\mathsf{A} = \mathsf{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ \frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Om X är en lösning måste $\mathsf{I} - \mathsf{AX}$ och A vara inverterbara. I så fall gäller

$$\mathsf{B}(\mathsf{I} - \mathsf{AX})^{-1} = \mathsf{A}^{-1} \iff \mathsf{B} = \mathsf{A}^{-1}(\mathsf{I} - \mathsf{AX}) = \mathsf{A}^{-1} - \mathsf{X} \iff \mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1} - \mathsf{B}.$$

Vi kollar nu att A är inverterbar och beräknar A^{-1}.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = y_1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ 2x_1 - 2x_3 = y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = y_1 \\ 2x_1 - 2x_3 = y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 + 2y_2 \\ 2x_2 = 2y_2 + y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_1 + 2y_2 \\ -2x_3 = -2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -y_1 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ -2x_3 = -2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -x_1 = -y_1 - y_2 & (\cdot -1) \\ x_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ -2x_3 = -2y_1 - 2y_2 + y_3 & (\cdot -\frac{1}{2}) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

Alltså är A inverterbar med inversen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Om X är en lösning gäller alltså

$$X = A^{-1} - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Det återstår nu att kolla att X verkligen är en lösning. Enligt ovanstående räcker det att kolla att $I - AX$ är inverterbar. Då

$$I - AX = I - A\left(A^{-1} - B\right) = I - (I - AB) = AB$$

måste vi alltså bevisa att AB är inverterbar. Då A är inverterbar räcker det att visa att B är inverterbar. Utveckling efter rad 2 ger

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 - (-4)) = -1 \neq 0$$

Matricen B är alltså inverterbar och lösningen til matrisekvationen är

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

6. a) Låt skärningen av ℓ' och ℓ_1 vara $P'\colon (1-t, t, -t)$. Då ℓ' är parallell med π måste vektorn

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PP'} = (1-t-1, t-2, -t-3) = (-t, t-2, -t-3)$$

vara vinkelrät mot planets normalvektor $\mathbf{n} = (3, -1, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \perp \mathbf{n} &\iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ &\iff (-t, t-2, -t-3) \cdot (3, -1, 1) = 0 \\ &\iff -3t - (t-2) + (-t-3) = 0 \\ &\iff -3t - t + 2 - t - 3 = 0 \\ &\iff -5t - 1 = 0 \\ &\iff t = -\tfrac{1}{5} \end{aligned}$$

Linjen ℓ' har alltså riktningsvektorn

$$\mathbf{v} = (-t, t-2, -t-3) = \left(\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5} - 2, \tfrac{1}{5} - 3\right) = \left(\tfrac{1}{5}, -\tfrac{11}{5}, -\tfrac{14}{5}\right) \parallel (1, -11, -14),$$

och en ekvation på parameterform blir

$$\ell'\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 11t \\ z = 3 - 14t. \end{cases}$$

b) Vi viser först att P inte ligger på ℓ_1:

$$\begin{cases} 1 = 1 - t \\ 2 = t \\ 3 = -t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Då lösning saknas ligger P inte på ℓ_1. Det finns alltså ett entydigt plan π_1 som innehåller P och ℓ_1. Skärningen Q_1 av ℓ'' och ℓ_1 måste ligga i π_1. Planet π_1 innehåller alltså två skilda punkter P och Q_1 från ℓ'', så ℓ'' ligger i π_1. Skärningen Q_2 av ℓ'' och ℓ_2 liggar därför också i π_1. Det återstår att utföra beräkningarne.

Punkten $P_1\colon (1, 0, 0)$ ligger på ℓ_1 varför $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P} = (1-1, 2-0, 3-0) = (0, 2, 3)$ är en riktningsvektor för π_1. Då ℓ_1 ligger i π_1 är också $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, -1)$ en riktningsvektor för π_1. Planet π_1 har alltså normalvektorn

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v} = (-1, 1, -1) \times (0, 2, 3) = (5, 3, -2)$$

Ekvationen för π_1 är alltså $\pi_1\colon 5x + 3y - 2z + d = 0$ för något d. Insättning av P ger

$$5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + d = 0 \iff d = -5$$

dvs. ekvationen är $\pi_1\colon 5x+3y-2z-5=0$. Punkten Q_2 fås nu som skärningen av π_1 och ℓ_2. Insättning av ℓ_2:s ekvation i π_1:s ekvation ger

$$5t+3t-2(-1+2t)-5=0 \iff 4t-3=0 \iff t=\tfrac{3}{4}.$$

Detta ger $Q_2\colon \left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},-1+2\cdot\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$. Linjen ℓ'' har alltså riktningsvektorn

$$\overrightarrow{PQ_2}=\left(\tfrac{3}{4}-1,\tfrac{3}{4}-2,\tfrac{1}{2}-3\right)=\left(-\tfrac{1}{4},-\tfrac{5}{4},-\tfrac{5}{2}\right)\parallel(1,5,10).$$

En ekvation för ℓ'' på parameterform blir alltså

$$\ell''\colon\ \begin{cases} x=1+t\\ y=2+5t\\ z=3+10t.\end{cases}$$

Alternativ: Låt skärningen av ℓ'' och ℓ_1 vara $P_1\colon (1-t_1,t_1,-t_1)$ och låt skärningen av ℓ'' och ℓ_2 vara $P_2\colon (t_2,t_2,-1+2t_2)$. Vektorerna

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1&=\overrightarrow{PP_1}=(1-t_1-1,t_1-2,-t_1-3)=(-t_1,t_1-2,-t_1-3)\\ \mathbf{v}_2&=\overrightarrow{PP_2}=(t_2-1,t_2-2,-1+2t_2-3)=(t_2-1,t_2-2,2t_2-4)\end{aligned}$$

måste då vara parallella. Beräkning ger

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1\parallel\mathbf{v}_2 &\iff \mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\mathbf{0}\\
&\iff (-t_1,t_1-2,-t_1-3)\times(t_2-1,t_2-2,2t_2-4)=\mathbf{0}\\
&\iff \left(\begin{vmatrix}t_1-2 & -t_1-3\\ t_2-2 & 2t_2-4\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-t_1 & -t_1-3\\ t_2-1 & 2t_2-4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-t_1 & t_1-2\\ t_2-1 & t_2-2\end{vmatrix}\right)=\mathbf{0}\\
&\iff \begin{cases}(t_1-2)(2t_2-4)-(-t_1-3)(t_2-2)&=0\\ t_1(2t_2-4)+(-t_1-3)(t_2-1)&=0\\ -t_1(t_2-2)-(t_1-2)(t_2-1)&=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}2t_1t_2-4t_1-4t_2+8+t_1t_2-2t_1+3t_2-6&=0\\ 2t_1t_2-4t_1-t_1t_2+t_1-3t_2+3&=0\\ -t_1t_2+2t_1-t_1t_2+t_1+2t_2-2&=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}3t_1t_2\ -6t_1\ -\ t_2&=-2\\ t_1t_2\ -3t_1\ -3t_2&=-3\\ -2t_1t_2\ +3t_1\ +2t_2&=2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}t_1t_2\ -3t_1\ -3t_2&=-3\\ 3t_1t_2\ -6t_1\ -\ t_2&=-2\\ -2t_1t_2\ +3t_1\ +2t_2&=2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}t_1t_2\ -3t_1\ -3t_2&=-3\\ 3t_1\ +8t_2&=7\\ -3t_1\ -4t_2&=-4\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}t_1t_2\ -3t_1\ -3t_2&=-3\\ 3t_1\ +8t_2&=7\\ 4t_2&=3\end{cases}\end{aligned}$$

De två sista ekvationerna ger $t_2 = \frac{3}{4}$ och $t_1 = \frac{1}{3}(7 - 8t_2) = \frac{1}{3}\left(7 - 8 \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}$. Det återstår att kolla den första ekvationen:

$$t_1 t_2 - 3t_1 - 3t_2 = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{4} - 3 \cdot \tfrac{1}{3} - 3 \cdot \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4} - 1 - \tfrac{9}{4} = \tfrac{1-4-9}{4} = -\tfrac{12}{4} = -3.$$

Ekvationen $\mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2$ har alltså den entydiga lösningen $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{3}{4}$. Linjen ℓ'' har därför riktningsvektorn

$$\mathbf{v}_1 = (-t_1, t_1 - 2, -t_1 - 3) = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3} - 2, -\tfrac{1}{3} - 3\right) = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{5}{3}, -\tfrac{10}{3}\right) \parallel (1, 5, 10),$$

och en ekvation på parameterform blir

$$\ell'' \colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 10t. \end{cases}$$