LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
Linjär algebra
2020-06-05

1. a) Area$=\left|\det(\bar{u}\ \ \bar{v})\right|$

$$\det(\bar{u}\ \ \bar{v})=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}=-14+5=-9\text{, d v s Area }=\left|-9\right|=9\text{ a e.}$$

b) Linjen L på affin form $ax+by+c=0$. Som normalvektorn kan vi ta $\bar{u}=(2,-5)$

$L:2x-5y+c=0$. Insättningen av punkten $(2,1)$ ger $2\cdot 2-5\cdot 1+c=0\Leftrightarrow c=1$.
Linjens ekvation är $2x-5y+1=0$.

c) För att bestäm skärningspunkten sätt $(x,y)=(1+t,2-t)$ in i L:
$2(1+t)-5(2-t)+1=0\Leftrightarrow t=1$. Insättningen av $t=1$ i $(x,y)=(1+t,2-t)$ ger skärningspunkten $(2,1)$.

2. a) Vinkeln mellan vektorn $\bar{u}=(-1,2,1)$ och linjen L är vinkeln mellan $\bar{u}$
L -s riktningsvektor $\bar{v}=\overrightarrow{PQ}=(1,3,2)$

$$\cos\theta=\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|}=\frac{(-1,2,1)\cdot(1,3,2)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{84}}=\frac{7}{2\sqrt{3}\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

b) För att bestäm skärningspunkterna behöver vi linjens ekvation.
Med punkten $P:(0,1,3)$ och riktningsvektorn $\bar{v}=(1,3,2)$ får vi

$$L:\begin{cases} x= t \\ y=1+3t \\ z=3+2t \end{cases}$$

Skärningen med koordinatplanen blir

xy -planet har ekvationen $z=0$: $3+2t=0\Leftrightarrow t=-\frac{3}{2}$.
Insättning i L ger koordinater för skärningspunkten $\left(-\frac{3}{2},-\frac{7}{2},0\right)$.

xz -planet har ekvationen $y=0$: $1+3t=0\Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$.
Skärningspunkten är $\left(-\frac{1}{3},0,\frac{7}{3}\right)$.

yz -planet har ekvationen $x=0$. Skärningspunkten är $(0,1,3)$.

3. S är spegelbilden av punkten $P:(1,1,1)$ i planet $x-y+z=0$.

Eftersom **origo ligger i planet** så bildar vi vektorn $\bar{u}=\overrightarrow{OP}=(1,1,1)$ och projicerar den på $\bar{n}$:

$$\bar{u}_1 = \frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,-1,1)}{3}(1,-1,1) = \frac{1}{3}(1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{OS} = \bar{u} - 2\bar{u}_1 = (1,1,1) - 2\cdot\frac{1}{3}(1,-1,1) = \left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right).$$

Punkten S har samma koordinater som vektorn $\overrightarrow{OS}$.

Svar: $S:\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$.

b) Vi namnger punkterna $P:(1,1,0), Q:(1,3,1)$, och $R:(2,2,1)$

Vi bildar vektorerna $\overrightarrow{PQ} = (0,2,1)$ och $\overrightarrow{PR} = (1,1,1)$. Som normalvektor tar vi $\bar{n} = \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = (1,1,-2)$. Då får vi planets ekvation $\pi_1: x+y-2z+d=0$.

Insättning av en punkt, t.ex. $(1,1,0)$ i π_1 ger $d=-2$.

Planet π_1 har ekvationen $\pi_1: x+y-2z-2=0$.

Enligt avståndsformeln (s.78) får vi $\rho = \dfrac{|3+1-2\cdot4-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \dfrac{|-6|}{\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}.$

4. Om A är avbildningsmatrisen till F så gäller:

$$A\cdot\begin{pmatrix}1&3&1\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$A = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1}$. Vi bestämmer inversen till $\begin{pmatrix}1&3&1\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$:

$$\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=y_1\\x_1+x_2+2x_3=y_2\\x_1+2x_2+x_3=y_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1+3x_2+x_3=y_1\\2x_2-x_3=y_1-y_2\\x_2=y_1-y_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=-3y_1-y_2+5y_3\\x_2=y_1-y_3\\x_3=y_1+y_2-2y_3\end{cases}.$$

Vi får $\begin{pmatrix}1&3&1\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-3&-1&5\\1&0&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

Alltså avbildningsmatrisen A blir

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&-1&5\\1&0&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&3\\1&2&-3\\2&1&-3\end{pmatrix}$$

5. För att avgöra om punkterna $A:(0,0,0)$, $B:(3,2,1)$ och $C:(2,1,3)$ ligger på samma sida om planet $3x-4y+12z-13=0$, välj en punkt i planet, t ex $P:(-1,-1,1)$, bilda vektorerna $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}$ och $\overrightarrow{PC}$, projicera dem på $\overline{n}=(3,-4,12)$ och jämför riktningarna.

Projektionen av $\overrightarrow{PA}=(1,1,-1)$ på $\overline{n}$ är $\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n}=\dfrac{(1,1,-1)\cdot(3,-4,12)}{3^2+(-4)^2+12^2}\overline{n}=\dfrac{-13}{169}\overline{n}$

Projektionen av $\overrightarrow{PB}=(4,3,0)$ på $\overline{n}$ är $\dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n}=\dfrac{(4,3,0)\cdot(3,-4,12)}{169}\overline{n}=\dfrac{0}{169}\overline{n}=0$

Projektionen av $\overrightarrow{PC}=(3,2,2)$ på $\overline{n}$ är $\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n}=\dfrac{(3,2,2)\cdot(3,-4,12)}{169}\overline{n}=\dfrac{25}{169}\overline{n}$

Vi ser att projektionen av $\overrightarrow{PA}$ och projektionen av $\overrightarrow{PC}$ är motsatt riktade, d v s punkterna A och C ligger på olika sidor om planet. Projektionen av $\overrightarrow{PB}$ är noll innebär att punkten B ligger i planet.

Obs Lägg märke till att täljaren i multipeln till $\overline{n}$ är $3x-4y+12z-13$, där (x,y,z) är koordinater för punkten A, resp. B och C.

Svar: A och C ligger på olika sidor om planet, B ligger i planet.

6. ”Skottlinjens” ekvation är $L:(x,y,z)=(0,0,100)+t(3,1,2)$.

För att bestämma skärningen sätter vi in L i ”myntplanets” ekvation

$\pi: x-y+z-700=0$

$3t-t+100+2t-700=0 \Leftrightarrow t=150$.

Detta ger träffpunkten $S=(450,150,400)$. Myntcentrum $A=(449,150,401)$

$\overrightarrow{AS}=(1,0,-1)$ och $\left|\overrightarrow{AS}\right|=\sqrt{2}$.

Svar: Han träffar myntet ty $\sqrt{2}<1.5$. (Myntets radie är 1.5 längdenheter)