LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **Linjär algebra**
Helsingborg **2020-04-23**

1. a) Linjens ekvation är $L:(x,y,z)=(3,1,0)+t(2,-1,3)$.

b) Om vi betecknar $\bar{v}_1=(-2,1,0)$, $A:(1,0,1)$, $B:(1,1,2)$ så kan vi ta som normalvektor till π vektorn $\bar{v}_1\times\bar{v}_2$, där $\bar{v}_2=\overrightarrow{AB}=(0,1,1)$. Vi får $\bar{n}=(-2,1,0)\times(0,1,1)=(1,2,-2)$. Insättningen i $ax+by+cz+d=0$ ger $\pi: x+2y-2z+d=0$. För att bestämma d sätt t.ex. $A:(1,0,1)$ in i π: $1-2+d=0\Leftrightarrow d=1$. Planets ekvation är $\pi: x+2y-2z+1=0$.

c) Sätt L in i π: $(3+2t)+2(1-t)-6t+1=0\Leftrightarrow t=1$. Insättningen av $t=1$ i L ger skärningspunkten $(5,0,3)$.

2. Enligt Huvudsatsen $\det A\neq 0\Leftrightarrow A$ är inverterbar.

Vi beräknar determinant. $\begin{vmatrix}1&-1&1&0\\1&0&1&1\\-1&2&1&-1\\0&2&2&0\end{vmatrix}$ Man kan utveckla direkt efter en rad eller en kolonn, eller tillverka nya nollor.

$$\begin{vmatrix}1&-1&1&0\\1&0&1&1\\-1&2&1&-1\\0&2&2&0\end{vmatrix}=R_2+R_3=\begin{vmatrix}1&-1&1&0\\1&0&1&1\\0&2&2&0\\0&2&2&0\end{vmatrix}=0,\text{ ty } R_3=R_4.$$

Vi får att $\det A=0\Leftrightarrow A$ är icke inverterbar.

3. $2B-XA=I\Leftrightarrow XA=2B-I\Leftrightarrow X=(2B-I)A^{-1}$.

Vi bestämmer A^{-1}:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=y_1\\x_1+2x_2+2x_3=y_2\\x_1\qquad\quad+x_3=y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+x_3=y_1\\-x_1\qquad\qquad=-2y_1+y_2\\x_1\qquad\quad+x_3=y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2y_1-y_2\\x_2=\ \ y_1\qquad-y_3\\x_3=-2y_1+y_2+y_3\end{cases}.$$

d.v.s. $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&-1\\-2&1&1\end{pmatrix}$. $2B-I=\begin{pmatrix}1&-4&-2\\0&-1&2\\2&-2&-1\end{pmatrix}$.

$$X=\begin{pmatrix}1&-4&-2\\0&-1&2\\2&-2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&-1\\-2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&2\\-5&2&3\\4&-3&1\end{pmatrix}.$$

4. $L:(x,y,z)=(1+ct,\ 2-2t, 3+dt)$, $\bar{v}=(c,-2,d)$.

a) x-axeln och därmed t,ex. $(1,0,0)$ är ortogonal mot $(c,-2,d)$ $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $(1,0,0)(c,-2,d)=0$ $\Leftrightarrow$ $c=0$.

b) x-axeln har parameterframställningen $(x,y,z)=(s,\ 0,0)$.

Då $c=0$ och L skär x-axeln får vi: $\begin{cases}1+0t=s\\2-2t=0\\3+dt=0\end{cases}$. *Ekv.*(2) ger $t=1\Rightarrow d=-3$.

Alltså ger $d=-3$ en skärning i punkten $(1,0,0)$.

5. Vi bestämmer först linjens ekvation

$$\begin{cases}x+y+z-3=0\\2x-y+5z\quad=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\-3y+3z=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=3\\y-z=2\end{cases}.$$

Sätt $z=t$. Linjens ekvation blir $L:(x,y,z)=(1,2,0)+t(-2,1,1)$,
där punkten $P_0:(1,2,0)$ och riktningsvektorn $\bar{v}=(-2,1,1)$.
För att bestämma spegelbilden av punkten $P:(4,-3,1)$ bildar vi vektorn
$\bar{u}=\overrightarrow{P_0P}=(3,-5,1)$. Vektorn $\bar{u}_1$ är projektionen av $\bar{u}$ på linjens riktningsvektor $\bar{v}$.
Projektionsformeln ger

$$\bar{u}_1=\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\bar{v}=\frac{(3,-5,1)\cdot(-2,1,1)}{6}(-2,1,1)=-\frac{5}{3}(-2,1,1)=\frac{5}{3}(2,-1,-1).$$

Det finns två sätt att fortsätta lösningen.

Alt.1: Man bestämmer spegelbilden $\overrightarrow{P_0S}$ av vektorn $\bar{u}=\overrightarrow{P_0P}$ som

$\overrightarrow{P_0S}=2\bar{u}_1-\bar{u}=\left(\frac{11}{3},\frac{5}{3},-\frac{13}{3}\right)$. Glöm inte att punkten $P_0:(1,2,0)$!

Om O är origo så får man att

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP_0}+\overrightarrow{P_0S}=(1,2,0)+\frac{1}{3}(11,5,-13)=\frac{1}{3}(14,11,-13),$$

Spegelbilden är punkten $S:\frac{1}{3}(14,11,-13)$.

Alt.2: Om O är origo så får man att $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}-2(\bar{u}-\bar{u}_1)=\ldots=\frac{1}{3}(14,11,-13)$.

6. Parallellepipedens volym är $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & -2 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = 36 \Leftrightarrow 6a + 3b - 6c = 36 \Leftrightarrow 2a + b - 2c = 12$.(*)

Vektorn (a, b, c) har längden $\sqrt{50}$, d.v.s. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{50} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 50$.(**)

$(a, b, c) \perp y$-axeln $\Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = 0$. Man får att $b = 0$.

Insättning av $b = 0$ i (*) ger $2a - 2c = 12 \Leftrightarrow a - c = 6 \Leftrightarrow \underline{a = 6 + c}$ (***)

(**) och (***) ger $(6 + c)^2 + c^2 = 50 \Leftrightarrow c^2 + 6c - 7 = 0 \Leftrightarrow c = -7$ eller 1.

Då får man $c = -7$ och $a = -1$ eller $c = 1$ och $a = 7$.

Svar: $(-1, 0, -7)$ eller $(7,\ 0,\ 1)$.