LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **Linjär algebra**
Helsingborg **2018-08-20**

1. a) Planets ekvation blir $3x - y + 2z + d = 0$ med d bestämt av punkten P.
Sätt in punkten P i planet: $3 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$.
Svar: Planets ekvation är $3x - y + 2z - 7 = 0$.

b) **<u>Alt.1</u>**: $\bar{u} \parallel \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} = k\,\bar{v}$: $(a+2, 2a) = k(1, a-1)$. Detta ger

$$\begin{cases} a + 2 = k \\ 2a = k(a-1) \end{cases} \Leftrightarrow 2a = (a+2)\cdot(a-1) \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1,\ a = 2.$$

<u>Alt2</u>: $\bar{u} \parallel \bar{v} \Leftrightarrow \det(\bar{u}\ \ \bar{v}) = 0$. Man får $\begin{vmatrix} a+2 & 1 \\ 2a & a-1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1,\ a = 2.$

c) En vektor som är ortogonal mot båda vektorerna är $(-2,1,-1)\times(1,-1,3) = (2,5,1)$.
Alla vektorer som är ortogonala mot båda vektorerna är $t(2,5,1)$.

2. a) $(\bar{u} - \bar{v})\cdot(2\bar{u} + \bar{v}) = 2\bar{u}^2 - \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}^2 = 2|\bar{u}|^2 - |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos\frac{\pi}{6} + |\bar{v}|^2 =$

$$= 2\cdot 2^2 - 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 3^2 = -1 - 3\sqrt{3}.$$

b) Man kan göra utveckling efter rad 2 eller kolonn 4 (direkt), men trevligare att förenkla först

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot K_1 + K_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \text{utveckling efter rad 2} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$ Alltså är vektorerna är linjärt oberoende.

3. Eftersom L_1 är ortogonal mot planet $2x - y + z - 5 = 0$ så kan vi ta som riktningsvektorn $\bar{v}_1$ vektorn $\bar{n} = (2,-1,1)$. Linjens ekvation blir
$L_1 : (x,y,z) = (3,1,0) + t(2,-1,1)$.
Punkterna $(3,0,3)$ och $(2,1,1)$ ger riktningsvektorn $\bar{v}_2 = (1,-1,2)$.
Vi får ekvationen för linjen L_2: $(x,y,z) = (2,1,1) + t(1,-1,2)$.
Vi undersöker om linjerna L_1 och L_2 skär varandra genom att sätta $L_1 = L_2$:

$$\begin{cases} 2 + t = 3 + 2s \\ 1 - t = 1 - s \\ 1 + 2t = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - 2s = 1 \\ -t + s = 0 \\ 2t - s = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ s = -1 \end{cases},$$ d.v.s linjerna skär varandra.

Insättningen av $t = -1$ i L_2 ger skärningspunkten $(1,2,-1)$.

4. $X \cdot A^T + I = 2B \;\Leftrightarrow\; X \cdot A^T = 2B - I \Leftrightarrow X = (2B - I)\cdot\left(A^T\right)^{-1}$.

Vi bestämmer $\left(A^T\right)^{-1}$, där $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad = y_2 \\ x_1 + 2x_2 \quad = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad = y_2 \\ x_2 = -y_2 + 2\,y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \quad 2y_2 - 3y_2 \\ x_2 = \quad -y_2 + 2y_3 \\ x_3 = -y_1 + 7y_2 - 10y_3 \end{cases} .$$

d.v.s. $\left(A^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -10 \end{pmatrix}$.

$$2B - I = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (2B - I)\cdot\left(A^T\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 7 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 17 \\ 0 & 11 & -18 \\ -1 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

5. För att bestämma skärningen mellan tre plan löser man ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay - 4z = 1 \\ ax + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

Om systemdeterminanten $\begin{vmatrix} 1 & a & -4 \\ a & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \ldots = a^2 - a - 2 = 0$ så har

ekvationssystemet oändligt många lösningar eller ingen lösning, d.v.s. för $a = -1$ och $a = 2$.

Om $a = -1$

$$\begin{cases} x - y - 4z = 1 \\ -x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 4z = 1 \\ 9z = 0 \\ 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 4z = 1 \\ z = 0 \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{så saknas lösning,}$$

d.v.s. ingen skärning.

Om $a = 2$ så har ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = -1 \\ x - y - z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 4z = 1 \\ -3y + 3z = -3 \\ -3y + 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 4z = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{oändligt många lösningar,}$$

d.v.s. skärning längs en linje.

För att få linjens ekvation sätt $z = t$: $L : (x, y, z) = (-1,1,0) + t(2,1,1)$.

Obs: om $y = t$ så får man $L : (x, y, z) = (-3,0,-1) + t(2,1,1)$.

Svar: Planen skär varandra längs linjen $L : (x, y, z) = (-1,1,0) + t(2,1,1)$ då $a = 2$.

6. a) Om man vill bestämma normalvektorn till planet π som

$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = (2,1,-1) \times (4,2,-2) = (0,0,0)$ så ser man att $\bar{v}_1 \parallel \bar{v}_2$ (linjerna är parallella!).

För att bestämma $\bar{n}$ väljer vi en punkt på L_1, t.ex. $P_1 : (3,2,-3)$ och en punkt på L_2,

t.ex. $P_2 : (1,0,1)$, bildar vektorn $\bar{v} = \overrightarrow{P_2P_1} = (2,2,-4)$,

beräknar $\bar{v}_1 \times \bar{v} = (2,1,-1) \times (2,2,-4) = (-2,6,2) = -2(1,-3,-1)$.

Vi kan ta som normalvektor $\bar{n} = (1,-3,-1)$.

Planets ekvation kan skrivas $\pi : x - 3y - z + d = 0$. För att bestämma d sätt in t.ex.

$P_2 : (1,0,1)$ i π. Vi får $d = 0$ (origo ligger i planet).

Planets ekvation blir $\pi : x - 3y - z = 0$.

b) En linjär avbildning som består av spegling i planet π åtföljt av ortogonal projektion är samma som en linjär avbildning för enbart ortogonal projektion på π.

Låt $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ beteckna den ortogonala projektionen av vektorn $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ på planet π. Vi projicerar $\bar{x}$ på $\bar{n}$, projektionsformeln ger

$$\bar{x}' = \frac{\bar{x} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n} = \frac{x_1 - 3x_2 - x_3}{11}(1,-3,-1).$$ Den sökta projektionen på planet är då

$$\bar{y} = \bar{x} - \bar{x}' \Leftrightarrow \quad (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{x_1 - 3x_2 - x_3}{11}(1,-3,-1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{1}{11}(x_1 - 3x_2 - x_3) \cdot 1 = \frac{10}{11}x_1 + \frac{3}{11}x_2 + \frac{1}{11}x_3 \\ y_2 = x_2 - \frac{1}{11}(x_1 - 3x_2 - x_3) \cdot (-3) = \frac{3}{11}x_1 + \frac{2}{11}x_2 - \frac{3}{11}x_3 \\ y_3 = x_3 - \frac{1}{11}(x_1 - 3x_2 - x_3) \cdot (-1) = \frac{1}{11}x_1 - \frac{3}{11}x_2 + \frac{10}{11}x_3 \end{cases}.$$

Avbildningsmatrisen blir $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$.