LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
Linjär algebra
2018-06-01

1.a) Minsta vinkeln mellan $\bar{u} = (-1, 1, 2)$ och $\bar{v} = (1, 2, 1)$:

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{(-1,1,2)\cdot(1,2,1)}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{1+4+1}} = \frac{-1+2+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ som ger } \theta = \frac{\pi}{3}.$$

b) Arean $= |\bar{u}\times\bar{v}| = |(-1, 1, 2)\times(1, 2, 1)| = |(-3,\ 3,\ -3)| = 3\sqrt{3}$.

c) $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ är linjärt beroende $\Leftrightarrow \det(\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}) = 0$. Vi testar med determinant:

$$\det(\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -21 \neq 0, \text{ dvs vektorerna är linjärt oberoende.}$$

Svar: Nej.

2. a) Vi bestämmer linjens ekvation

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y+5z\ \ =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 3x+6z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x\qquad +2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2t \\ y=2+t \\ z=\quad t \end{cases}$$

b) $A:(1,1,1)$, $B:(1,2,2)$ och $C:(3,0,3)$ ligger i planet π_1.

Vi bildar vektorerna $\bar{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (0,1,1)$ och $\bar{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (2,-1,2)$. Som normalvektor tar vi $\bar{n} = \bar{v}_1\times\bar{v}_2 = (3,2,-2)$. Då får vi planets ekvation $\pi_1 : 3x+2y-2z+d=0$.

Insättning av en punkt, t.ex. $(1,1,1)$ i π_1 ger $d=-3$.

Planet π_1 har ekvationen $\pi_1 : 3x+2y-2z-3=0$.

c) Vi bestämmer skärningspunkten genom att sätta L in i π :

$$3(-1+2t)+2(2+t)-2t-3=0 \Leftrightarrow 4-6t=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}.$$

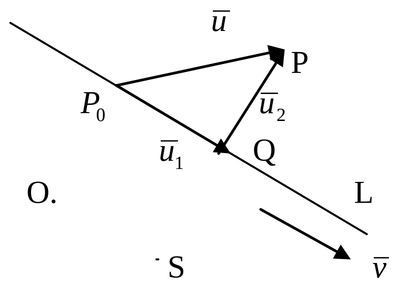
Insättningen av $t=\frac{2}{3}$ i L ger skärningspunkten $\left(-\frac{1}{3},\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right)$.

3. $L:(x,y)=(1+3t\ ,2-t)$, $P:(3,3)$.

$\overline{v}=(3,-1)$ är riktningsvektor till linjen L.

$P_0:(1\ ,\ 2\ )$ är en punkt på linjen. $\overline{u}=\overrightarrow{P_0P}=(2\ ,1)$

Vektorn $\overline{u}_1$ är projektionen av $\overline{u}$ på $\overline{v}$



$$\overline{u}_1=\frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\overline{v}=\frac{(2,1)\cdot(3,-1)}{9+1}(3,-1)=\frac{5}{10}(3,-1)=\frac{1}{2}(3,-1).$$

a) $\overline{OQ}=\overline{OP_0}+\overline{u}_1=(1,2)+\frac{1}{2}(3,-1)=\frac{1}{2}(5,3)=(\frac{5}{2},\frac{3}{2}).$

Ortogonala projektionen av punkten P är $Q:(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$

b) $\overline{u}_2=\overline{u}-\overline{u}_1=(2,1)-\frac{1}{2}(3,-1)=\frac{1}{2}(1,3).$

$\overline{OS}=\overline{OP}-2\overline{u}_2=(3,3)-2\cdot\frac{1}{2}(1,3)=(2,0)$.

Spegelbilden av punkten P är $S:(2,0).$

4. $A^{-1}\cdot X\cdot B=C \iff X=A\cdot C\cdot B^{-1}$.

Vi bestämmer B^{-1}:

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=y_1\\-2x_1+2x_2-x_3=y_2\\x_1-x_2+x_3=y_3\end{cases}\iff\begin{cases}-2x_1+x_2=y_3-y_1\\-x_1+x_2=y_2+y_3\\x_1-x_2+x_3=y_3\end{cases}\iff\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1+2y_2+y_3\\x_3=y_2+2y_3\end{cases}.$$

d.v.s. $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$. $X=A\cdot C\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}-1&6&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&11&6\\2&6&5\end{pmatrix}.$$

5. Vi får $\bar{u} \perp \bar{v} \Leftrightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \Leftrightarrow \quad (-1,1,2)\cdot(a,-5,2a) = 0 \Leftrightarrow -5+3a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}$.

$\bar{e}_1$ är parallell med $\bar{u} = (-1,1,2)$ och

$\bar{e}_2$ är parallell med $\bar{v} = \frac{5}{3}(1,-3,2)$.

Vi får $\bar{e}_1 = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$, $\bar{e}_2 = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,2)$.

$$\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) \times \frac{1}{\sqrt{14}}(1,-3,2) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(8,4,2) = \frac{1}{\sqrt{21}}(4,2,1)..$$

6. Den infallande ljusstrålen går längs en linje med ekvationen $L_i : (x,y,z) = (0,0,0) + t(1,2,3)$, Vi bestämmer skärningspunkt mellan linjen och planet, genom att sätta in L_i i π: $t + 2t + 3t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Insättningen av $t = 2$ i L_i ger skärningspunkten $A:(2,4,6)$. Nu har vi en punkt på den reflekterade linjen L_R. Man behöver bara riktningsvektorn.

Vi bildar vektorn $\bar{u} = \overrightarrow{AO} = (-2,-4,-6)$ och projicerar den på normalvektorn $\bar{n} = (1,1,1)$. Projektionsformeln ger

$$\bar{u}' = \frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\bar{n} = \frac{(-2,-4,-6)\cdot(1,1,1)}{3}(1,1,1) = -4(1,1,1).$$

Vektorn $\overrightarrow{AS} = \bar{u} - 2\bar{u}' = (-2,-4,-6) + 2\cdot 4(1,1,1) = (6,4,2) = 2(3,2,1)$ ligger på L_R.
Om vi väljer $\bar{v}_R = (3,2,1)$ så blir linjens ekvation $L_R : (x,y,z) = (2,4,6) + t(3,2,1)$.

Alt: Man kan bestämma $\bar{v}_R$ som spegelbilden av vektorn $(1,2,3)$ i planet π.

$L_R : (x,y,z) = (2,4,6) + t(3,2,1)$, $\bar{v}_R = (3,2,1)$
$x - axeln : (x,y,z) = (t,0,0)$, $\bar{v}_x = (1,0,0)$.
$\bar{n} = \bar{v}_R \times \bar{v}_x = (0,1,-2)$. Tag $P_1 : (2,4,6)$ på L_R och $O:(0,0,0)$ på x-axeln.
Sätt $\bar{u} = \overline{OP_1} = (2,4,6)$. Kalla projektionen av $\bar{u}$ på $\bar{n}$ för $\bar{u}'$.

$$\bar{u}' = \frac{\bar{u}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n} = \frac{(2,4,6)\cdot(0,1,-2)}{0+1+(-2)^2}(0,1,-2) = \frac{8}{5}(0,-1,2).$$

Avståndet mellan L_R och x-axeln är $|\bar{u}'| = \frac{8}{5}\sqrt{5} = \frac{8}{\sqrt{5}}$.