1)

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.5 + 0.6 - 0.3$

$= 0,8$

$\Rightarrow$ S/h att varken A eller B inträffar

$= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = \underline{\underline{0,2}}$

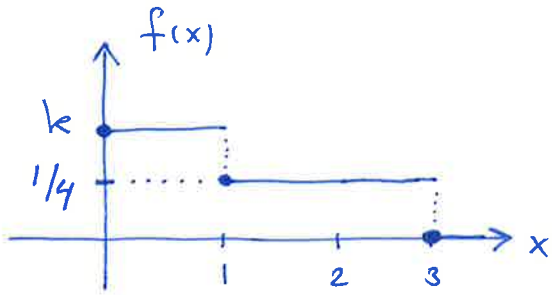
b) Sätt X = antal felaktiga enheter

$X \in Bin(19, 0.1)$

$P(X > 2) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$

$= 0,295.$

2) $f(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ k & , 0 \le x < 1 \\ 1/4 & , 1 \le x < 3 \\ 0 & , x \ge 3. \end{cases}$



a) Utnyttja villkoret : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 k\,dx}_{=k} + \underbrace{\int_1^3 \frac{1}{4}\cdot dx}_{=\frac{1}{2}} = 1 \iff \underline{\underline{k = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}}.$$

b) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

<u>Då $x<0$</u> : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0$

<u>Då $0 \le x < 1$</u> : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{=0} + \int_0^x f(t)\,dt$

$$= \int_0^x \frac{1}{2}\,dt = \frac{x}{2}$$

<u>Då $1 \le x < 3$</u> : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{=\frac{1}{2}} + \int_1^x f(t)\,dt$

$$= \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{1}{4}(x+1)$$

<u>Då $x \ge 3$</u> : $F(x) = 1.$

c) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{2}\,dx + \int_1^3 x \cdot \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{5}{4}.$

3)

a) $E(X) = \sum_{\text{alla } x} x\,p(x) = \sum_{x=1}^{5} x\,p(x) = 0{,}12 + 2\cdot 0{,}29 + 3\cdot 0{,}35 + 4\cdot 0{,}15 + 5\cdot 0{,}09 = \underline{\underline{2{,}8}}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{x=1}^{5} x^2 p(x) - 2{,}8^2$

$= 1^2\cdot 0{,}12 + 2^2\cdot 0{,}29 + 3^2\cdot 0{,}35 + 4^2\cdot 0{,}15 + 5^2\cdot 0{,}09 - 2{,}8^2$

$= \underline{\underline{1{,}24}}.$

$P(X < 3{,}5) = P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$= 0{,}12 + 0{,}29 + 0{,}35 = \underline{\underline{0{,}76}}.$

b) Sätt X = antalet klagomål per timme.

$\Rightarrow X \in Po(\lambda)$. ($\lambda$ här okänt)

Vi vet att: $P(X=0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = 0{,}10$

$\Leftrightarrow -\lambda = \ln 0{,}10 \Leftrightarrow \lambda = -\ln 0{,}10 = 2{,}3$

Detta ger:

$P(X \geq 3) = 1 - \sum_{x=0}^{2} P(X=x) = 1 - \left(e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}\right)$

$= \{\lambda = 2{,}3\} = \underline{\underline{0{,}40}}.$

4) Sätt X = hastighet $\in N(90,5)$.

a) $P(X > 95) = 1 - P(X \leq 95) = 1 - \Phi\left(\frac{95-90}{5}\right)$

$= 1 - \Phi(1) \approx \underline{\underline{0{,}16}}$.

b) Notera att $\bar{X} \in N(90, 5/\sqrt{5})$

$\Rightarrow P(\bar{X} > 95) = 1 - \Phi\left(\frac{95-90}{5/\sqrt{5}}\right) \approx \underline{\underline{0{,}013}}$.

c) Sätt Y = antal bilar som överstiger 95 km/h.

Notera att $Y \in Bin(5, 0{,}16)$

från uppg. a).

$\Rightarrow P(Y \leq 1) = P(Y=0) + P(Y=1) = \ldots = \underline{\underline{0{,}82}}$.

5)

a) Händelser: A = produkt tillverkad av maskin 1

B = ——— " ——— 2

D = produkt är defekt

Vi vill beräkna $P(A|D)$:

$$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|A)\cdot P(A)}{P(D|A)\cdot P(A) + P(D|B)\cdot P(B)}$$

$$= \frac{0{,}05\cdot 0{,}40}{0{,}05\cdot 0{,}40 + 0{,}08\cdot 0{,}60} = \underline{\underline{0{,}294.}}$$

b) $X \in Exp(\lambda)$ där $\lambda = 1/4$.

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$; $x \geq 0$.

$$P(X \leq 10 \mid X > 2) = \frac{P((0 \leq X \leq 10) \cap (X > 2))}{P(X > 2)}$$

$$= \frac{P(2 < X \leq 10)}{1 - P(X \leq 2)} = \frac{P(X \leq 10) - P(X \leq 2)}{1 - P(X \leq 2)}$$

$$= \frac{1 - e^{-10\lambda} - (1 - e^{-2\lambda})}{e^{-2\lambda}} = \frac{e^{-2\lambda}(1 - e^{-8\lambda})}{e^{-2\lambda}}$$

$$= 1 - e^{-8\lambda} = \left\{\lambda = \frac{1}{4}\right\} = 1 - e^{-2} \approx 86.5\,\%$$

<u>Anmärkning</u>: En alternativ (och mycket kortare) lösning är att utnyttja exponentialfördelningens minneslöshet.

6) X_i = antal böcker en godtycklig besökare lånar.

$$E(X_i) = \sum_{x=1}^{4} x\, P(X_i = x) = 2{,}0$$

$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \sum_{x=1}^{4} x^2 P(X_i = x) - 2{,}0^2$$

$$= 1{,}5.$$

Sätt Y = antal böcker som 152 personer lånar.

Notera att $Y = \sum_{i=1}^{152} X_i \overset{\sim}{\in} N(152 \cdot 2{,}0, \sqrt{152 \cdot 1{,}5})$

(centrala gränsvärdessatsen)

$$\Rightarrow P(Y > 290) = 1 - P(Y \leq 290)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{290 - 304}{\sqrt{152 \cdot 1{,}5}}\right) = 1 - \Phi(-0{,}927)$$

$$= 1 - (1 - \Phi(0{,}927)) = \Phi(0{,}927) = \underline{\underline{82{,}3\ \%}}$$