Lunds Tekniska Högskola **Lösningar**
Matematik **FMSF35**
Helsingborg **2019-04-24**

1. a)

$$
\begin{aligned}
P(\xi > 3) &= 1 - P(\xi \leq 3) \\
&= 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3)) \\
&= 1 - \left(\binom{13}{0} \cdot 0.3^0 \cdot 0.7^{13} + \binom{13}{1} \cdot 0.3^1 \cdot 0.7^{12} + \binom{13}{2} \cdot 0.3^2 \cdot 0.7^{11} \right. \\
&\qquad \left. + \binom{13}{3} \cdot 0.3^3 \cdot 0.7^{10} \right) \\
&= \frac{579\,394\,354\,239}{10^{12}} \cong 0.57939.
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
P(\text{färra än 3 defekta}) &= P(0, 1 \text{ eller } 2 \text{ defekta}) \\
&= \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{6}{5}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{4}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{10}{5}} \\
&= \frac{1 \cdot 6}{252} + \frac{4 \cdot 15}{252} + \frac{6 \cdot 20}{252} = \frac{186}{252} = \frac{31}{42} \cong 0.73810.
\end{aligned}
$$

Alternativ: (observera att $P(5 \text{ defekta}) = 0$ då man högst kan få 4 defekta):

$$
\begin{aligned}
P(\text{färra än 3 defekta}) &= 1 - P(\text{minnst 3 defekta}) = 1 - \big(P(3 \text{ eller } 4 \text{ defekta})\big) \\
&= 1 - \left(\frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{5}} + \frac{\binom{4}{4} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{5}} \right) = 1 - \left(\frac{4 \cdot 15}{252} + \frac{1 \cdot 6}{252} \right) \\
&= 1 - \frac{66}{252} = \frac{31}{42} \cong 0.73810.
\end{aligned}
$$

c)

$$
P(\zeta < 7) = \Phi\left(\frac{7-8}{0.5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \cong 1 - 0.97725 = 0.02275.
$$

2. Antallet möjliga fall är $6 \cdot 6 = 36$. Låt ξ_1 beteckna värdet av 1:a tärningkastet och ξ_2 beteckna värdet av 2:a tärningkastet.

a) De gynnsamma fall är

$$(\xi_1, \xi_2) \in \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}.$$

Sannolikheten blir då $P(A) = {}^{12}\!/_{36} = {}^{1}\!/_{3}$.

Alternativ: Sannolikheten för A är samma som sannolikheten för att slå två eller fem med en terning (värdet av det andra tärningkastet är irrelevant). Alltså är $P(A) = {}^2\!/\!_6 = {}^1\!/\!_3$.

b) De gynnsamma fall är

$$(\xi_1, \xi_2) \in \{(1,6),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),\\ (5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Sannolikheten blir då $P(B) = {}^{21}\!/\!_{36} = {}^7\!/\!_{12}$.

c) Vi beräkner först $P(A \cap B)$. De gynnsamma fall ges av

$$(\xi_1, \xi_2) \in \{(2,5),(2,6),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}.$$

Sannolikheten blir då $P(A \cap B) = {}^7\!/\!_{36}$. Från a) och b) fås

$$P(A) \cdot P(B) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{7}{12} = \tfrac{7}{36}.$$

Alltså gäller $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, dvs. händelserna A och B är oberoende.

3. a)

$$\begin{aligned} P(\text{gul}) &= P(\text{gul och bil}) + P(\text{gul och cykel}) \\ &= P(\text{bil}) \cdot P(\text{gul} \mid \text{bil}) + P(\text{cykel}) \cdot P(\text{gul} \mid \text{cykel}) \\ &= 0.3 \cdot (1 - 0.8) + 0.7 \cdot (1 - 0.25) = 0.585. \end{aligned}$$

b) Från a) fås

$$P(\text{cykel} \mid \text{blå}) = \frac{P(\text{cykel}) \cdot P(\text{blå} \mid \text{cykel})}{P(\text{blå})} = \frac{0.7 \cdot 0.25}{1 - 0.585} = \frac{35}{83} \cong 0.42169.$$

4. Vi har

$$E(\xi) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.28 + 3 \cdot 0.23 + 4 \cdot 0.11 + 5 \cdot 0.11 + 6 \cdot 0.07 = 2.86$$

och

$$E\left(\xi^2\right) = 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.28 + 3^2 \cdot 0.23 + 4^2 \cdot 0.11 + 5^2 \cdot 0.11 + 6^2 \cdot 0.07 = 10.42.$$

Därmed är variansen för ξ

$$V(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E(\xi)^2 = 10.42 - 2.86^2 = 2.2404.$$

Enligt Sats 5A a) och b) gäller då

$$E(3\xi + 5) = 3E(\xi) + 5 = 3 \cdot 2.86 + 5 = 13.58$$

och

$$V(3\xi + 5) = 3^2 V(\xi) = 3^2 \cdot 2.2404 = 20.1636.$$

Standardavvikelsen blir alltså

$$\sigma(3\xi + 5) = \sqrt{V(3E(\xi) + 5)} = \sqrt{20.1636} \cong 4.49039.$$

5. a) Då f är en frekvensfunktion gäller

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x + k\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{2}x^2 + kx\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} + k,$$

vilket ger $k = 1/2$.

b) För $0 \leq x \leq 1$ ges fördelningsfunktionen av

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}t\right]_{t=0}^{x} = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x.$$

Vi har alltså

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x & \text{för } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{för } 1 < x. \end{cases}$$

c) Vi har

$$\begin{aligned} P\left(\tfrac{1}{4} \leq \xi < \tfrac{3}{4}\right) &= F\left(\tfrac{3}{4}\right) - F\left(\tfrac{1}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{21}{32} - \frac{5}{32} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

d) Beräkning ger

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \cdot \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 + \tfrac{1}{2}x\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Väntevärden är alltså $E(\xi) = \frac{7}{12}$. För at bestämma variansen beräknas

$$\begin{aligned} E\left(\xi^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot \left(x + \tfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{6}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Detta ger variansen

$$V(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E(\xi)^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}.$$

6. Livslängden ξ för en glödlamp uppfyllar $\xi \in \mathrm{Exp}(\lambda)$, där λ är så att

$$E(\xi) = {}^1\!/\!{}_\lambda = 350.$$

Detta ger $\lambda = {}^1\!/\!{}_{350}$. Sannolikheten för att en given glödlamp slocknar innan 300 timar ges då av

$$p = P(\xi \leq 300) = F(300) = 1 - e^{-300/350} \cong 0.57563.$$

Antallet ζ av glödlampor som slocknar innan 300 timer uppfyller då $\zeta \in \mathrm{Bin}(200, p)$ som enligt centrala gränsvärdesatsen är approximativt $N(200p, \sqrt{200p(1-p)})$. Alltså är sannolikheten för att bytet sker inom 300 timmar

$$\begin{aligned} P(\zeta \geq 105) &= 1 - P(\zeta \leq 104) \approx 1 - \Phi\left(\frac{104 - 200p}{\sqrt{200p(1-p)}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{104 - 200 \cdot 0.57563}{\sqrt{200 \cdot 0.57563 \cdot (1 - 0.57563)}}\right) \\ &= 1 - \Phi(-1.59169) = \Phi(1.59169) = 0.94427. \end{aligned}$$

Den eksakta sannolikhet ges av binomialfördelningen

$$P(\zeta \geq 105) = \sum_{k=105}^{200} \binom{200}{k} p^k (1-p)^{200-k} \cong 0.93528.$$