Matematisk statistik | **LÖSNINGAR TILL Tentamen: 2017–10–21 kl 9^{00}–14^{00}**
Lunds tekniska högskola | **FMS F35 — Grundläggande sannolikhetsteori för IEA, 4 hp**
Lunds universitet | **FMA F20 — Sannolikhetsteori (omtenta), 4 hp**

1. Vi vet att $P(\text{styrbord}) = 0.05$, $P(\text{babord}) = 0.03$ och $P(\text{styrbord} \cap \text{babord}) = 0.01$.

   Observera att styrbord och babord *inte* är oberoende av varandra. Det ser man enklast genom att $P(\text{styrbord} \cap \text{babord}) = 0.01 \neq P(\text{styrbord}) \cdot P(\text{babord}) = 0.05 \cdot 0.03 = 0.0015$.

   (a) $P(\text{minst en}) = P(\text{styrbord} \cup \text{babord}) = P(\text{styrbord}) + P(\text{babord}) - P(\text{styrbord} \cap \text{babord}) =$
   $= 0.05 + 0.03 - 0.01 = 0.07$.

   (b) Definitionen på betingad sannolikhet ger

$$P(\text{styrbord} \mid \text{styrbord} \cup \text{babord}) = \frac{P(\text{styrbord} \cap (\text{styrbord} \cup \text{babord}))}{P(\text{styrbord} \cup \text{babord})} =$$
$$= \frac{P(\text{styrbord})}{P(\text{styrbord} \cup \text{babord})} = \frac{0.05}{0.07} = 0.714.$$

   (c) $P(\text{precis en}) = P(\text{minst en}) - P(\text{båda}) = P(\text{styrbord} \cup \text{babord}) - P(\text{styrbord} \cap \text{babord}) =$
   $= 0.07 - 0.01 = 0.06$.

2. (a) Med $\xi =$ "antal defekta" $\in Bin(n,\, p) = Bin(10,\, 0.2)$ får vi

$$P(\xi \leq 1) = \sum_{k=0}^{1} p_\xi(k) = \binom{10}{0} 0.2^0 (1-0.2)^{10} + \binom{10}{1} 0.2^1 (1-0.2)^{10-1} =$$
$$= 0.8^{10} + 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8^9 = 0.376.$$

   (b) Med $\xi =$ "antal hål" $\in Po(\lambda) = Po(2)$ får vi

$$P(\xi = 0) = p_\xi(0) = \mathrm{e}^{-2} \frac{2^0}{0!} = \mathrm{e}^{-2} = 0.135.$$

   (c) Med $\xi =$ "livslängd" $\in Exp(\lambda) = Exp(1/4)$ får vi

$$P(\xi > 5) = \int_5^\infty f_\xi(x)\, dx = \int_5^\infty \frac{1}{4}\, \mathrm{e}^{-x/4}\, dx = \left[-\mathrm{e}^{-x/4}\right]_5^\infty = 0 + \mathrm{e}^{-5/4} = 0.287.$$

3. (a) $P(\xi < 650) = \Phi(\frac{650 - 800}{50}) = \Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$.

   (b) Eftersom ξ och η är oberoende och normalfördelade med
   $E(\eta - \xi) = E(\eta) - E(\xi) = 900 - 800 = 100$ och
   $V(\eta - \xi) = V(\eta) + (-1)^2 V(\xi) = 60^2 + 50^2 = 6100$ så är
   $\eta - \xi \in N\left(100,\, \sqrt{6100}\right) = N\,(100,\, 78.1)$, vilket ger

$$P(\eta - \xi > 150) = 1 - \Phi(\frac{150 - 100}{78.1}) = 1 - \Phi(0.64) = 1 - 0.7389 = 0.2611.$$

4. (a) Vi har att

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{3} k \cdot p_\xi(k) = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.1 = 1.6,$$

$$\begin{aligned} V(\xi) &= E(\xi^2) - E^2(\xi) = \sum_{k=0}^{3} k^2 \cdot p_\xi(k) - 1.6^2 = \\ &= 0^2 \cdot 0.1 + 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.5 + 3^2 \cdot 0.1 - 1.6^2 = 3.2 - 1.6^2 = 0.64, \\ \sigma &= \sqrt{V(\xi)} = \sqrt{0.64} = 0.8. \end{aligned}$$

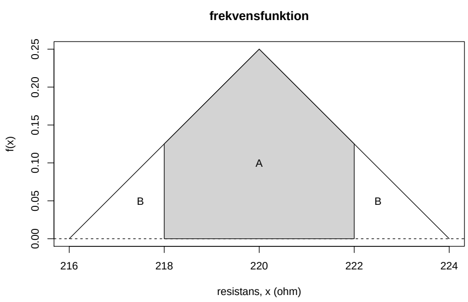
(b) Eftersom ξ_i = "antal gasoltuber som används dag i", $i = 1, \ldots, n$, är oberoende av varandra och har samma fördelning med $E(\xi) = \mu = 1.6$ och $\sigma = 0.8$, och där $n = 250$ är stort, kan vi normalapproximera summan enligt Centrala gränsvärdessatsen.

Med $E(\sum_{i=1}^{250} \xi_i) = \sum_{i=1}^{250} E(\xi_i) = 250\mu$ och $V(\sum_{i=1}^{250} \xi_i) = \sum_{i=1}^{250} V(\xi_i) = 250\sigma^2$ har vi alltså

$$\sum_{i=1}^{250} \xi_i \underset{\approx}{\in} N\left(250\mu,\ \sigma\sqrt{250}\right) = N\left(250 \cdot 1.6,\ 0.8\sqrt{250}\right) = N(400,\ 12.6)$$

$$P(\sum_{i=1}^{250} \xi_i > 425) \approx 1 - \Phi(\frac{425 - 400}{12.6}) = 1 - \Phi(1.98) = 1 - 0.9761 = 0.0239.$$

5. (a) Eftersom fördelningen är en symmetrisk triangel blir det enklast med en geometrisk lösning:



$$\begin{aligned} P(218 < \xi < 222) &= A = 1 - 2 \cdot B = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}(218 - 216) \cdot f_\xi(218) \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2}(218 - 216) \cdot \frac{1}{16}(218 - 216) = 1 - \frac{2^2}{16} = 0.75. \end{aligned}$$

Vill man integrera blir det

$$P(218 < \xi < 222) = \int_{218}^{222} f_\xi(x)\,dx = \int_{218}^{220} \frac{1}{16}(x - 216)\,dx + \int_{220}^{222} \frac{1}{16}(224 - x)\,dx.$$

(b) Med $p = P(\text{uppfyller kravet}) = 0.75$ och η = "antal resistorer vi måste undersöka" vår vi

$$\begin{aligned} P(\eta = 3) &= P(\text{de två första uppfyller inte kravet men den tredje gör det}) = \\ &= (1 - p)^2 \cdot p = (1 - 0.75)^2 \cdot 0.75 = 0.047. \end{aligned}$$

6. (a) *Alt.1:* Sannolikhetsfunktionen för ξ ges av:

$$\begin{aligned}
p_\xi(0) &= P(\text{ingen fungerar}) = (1-0.9)^2 = 0.01,\\
p_\xi(50) &= P(\text{Gertrud fungerar men inte Horatius}) = 0.9(1-0.9) = 0.09,\\
p_\xi(200) &= P(\text{Horatius fungerar men inte Gertrud}) = 0.9(1-0.9) = 0.09,\\
p_\xi(250) &= P(\text{båda fungerar}) = 0.9^2 = 0.81
\end{aligned}$$

och väntevärdet $E(\xi) = \sum_k k \cdot p_\xi(k) = 0 \cdot 0.01 + 50 \cdot 0.09 + 200 \cdot 0.09 + 250 \cdot 0.81 = 225\,\text{kWh}$.

Alt.2: Sätt effekterna från de två kraftverken till η_H respektive η_G med sannolikhetsfunktionerna

$$p_{\eta_\text{H}}(k) = \begin{cases} 0.1 & k = 0, \\ 0.9 & k = 200 \end{cases} \qquad p_{\eta_\text{G}}(k) = \begin{cases} 0.1 & k = 0, \\ 0.9 & k = 50. \end{cases}$$

Då har vi $E(\eta_\text{H}) = \sum_k k \cdot p_{\eta_\text{H}} = 0 \cdot 0.1 + 200 \cdot 0.9 = 180\,\text{kWh}$ och
$E(\eta_\text{G}) = 0 \cdot 0.1 + 50 \cdot 0.9 = 45\,\text{kWh}$, vilket ger
$E(\xi) = E(\eta_\text{H} + \eta_\text{G}) = E(\eta_\text{H}) + E(\eta_\text{G}) = 180 + 45 = 225\,\text{kWh}$.

(b) Med $\xi =$ ”antal träskruvar” får vi $P(\xi = 1) = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \dfrac{5 \cdot 3}{\frac{8 \cdot 7}{2}} = \dfrac{15}{28} = 0.536$.
