1] a) $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^2 x^{-1/2}\cdot \ln(x)\,dx$

$$= \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{1/2}}{1/2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^2 - \left[4\sqrt{x}\right]_1^2$$

$$= 2\sqrt{2}\ln(2) - 2\cdot\sqrt{1}\cdot\ln(1) - (4\sqrt{2} - 4\sqrt{1})$$

$$= 2\sqrt{2}\ln(2) - 4\sqrt{2} + 4$$

b) $\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{t-1}{2t}\,dt$

$$= \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(t - \ln|t|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+x^2 - \ln(1+x^2)\right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\ln(1+x^2) + D.$$

c) $\int x\cdot\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x}_{\text{inre derivata}}\cdot\sin(x^2)\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C.$$

2) a)

$$\frac{\cos(x)+\ln(1+x)-(1+x)}{e^x-1-x}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{x^2}{2!}+x^4B_1(x)\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}+x^3B_2(x)\right)-1-x}{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+x^3B_3(x)\right)-1-x}$$

$$= \frac{-x^2+x^3B_4(x)}{\frac{x^2}{2}+x^3B_3(x)} = \frac{-1+xB_4(x)}{1/2+xB_3(x)} \to -2 \text{ , } x\to 0.$$

b) Volymen,

$$V = \int_0^2 2\pi x y \, dx = \int_0^2 2\pi x^2\sqrt{x^3+1}\, dx$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = x^3+1 \\ dt = 3x^2 dx \\ x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=2 \Rightarrow t=9 \end{array}\right] = \int_1^9 2\pi \cdot \sqrt{t}\cdot \frac{dt}{3}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_1^9 = \frac{4\pi}{9}\cdot(27-1) = \frac{104\pi}{9} \quad \text{v.e.}$$

3) $$y' - \frac{2}{x}\cdot y = \frac{5x}{x^2+2x+5} \quad ; \ x>0. \qquad (*)$$

$$IF = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln(x)} = \frac{1}{x^2}.$$

Mult. $(*)$ med IF:

$$\frac{1}{x^2}\cdot y' - \frac{2}{x^3}y = \frac{5}{x(x^2+2x+5)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(y\cdot\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{5}{x(x^2+2x+5)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y\cdot\frac{1}{x^2} = \int \frac{5}{x(x^2+2x+5)}dx$$

Partialbråksuppdelning: $\frac{5}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$

$$5 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)\cdot x$$

Identifiering av koeff: $\begin{cases} 5A = 5 \\ 2A + C = 0 \\ A+B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-2 \end{cases}$

DVS, $$y\cdot\frac{1}{x^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{(x+2)}{x^2+2x+5}\right)dx$$

$$(x>0) \longrightarrow = \ln|x| - \int\left(\frac{(x+1+1)}{(x+1)^2+4}\right)dx = \left[\begin{matrix} t = x+1 \\ dt = dx\end{matrix}\right]$$

$$= \ln(x) - \int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+4} + \frac{1}{4((\frac{t}{2})^2+1)}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{4}\cdot\frac{\arctan(\frac{x+1}{2})}{1/2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x^2}{x^2+2x+5}\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

$y/x^2 \to 0$ då $x\to\infty$ ger att $C = \frac{\pi}{4}$.

4) a) $y = 3 + \int_0^x \frac{t+1}{y(t)}\,dt \quad , y > 0.$

$\Rightarrow y' = \frac{x+1}{y}$ med villkoret $y(0) = 3$.

Separera variabler:

$$y \cdot y' = x+1 \Leftrightarrow y \cdot \frac{dy}{dx} = x+1 \Leftrightarrow y\,dy = (x+1)\,dx$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int (x+1)\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$y(0) = 3$ ger $C = \frac{9}{2}$. Dvs,

$$y = \underset{(-)}{+}\sqrt{x^2+2x+9}.$$

b) För $0 < x < 1$ gäller $0 < \sin(x) < x$,

dvs, $0 < x - \sin(x) < x$, vilket ger

$$\frac{1}{x-\sin(x)} > \frac{1}{x}$$

Detta ger: $\int_0^1 \frac{1}{x-\sin(x)}\,dx > \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \quad (*)$

Vi vet enligt Sats 13.11(2) att $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ är divergent. Därför är även $\int_0^1 \frac{1}{x-\sin(x)dx}$ divergent enligt $(*)$.

5) $y'' + 2y' + y = x + 3 + 2\cos(x)$.

Homogen lösn: Kar. polynom: $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$

ger $r = -1$.

$$\Rightarrow \quad y_h = (C_1 x + C_2) e^{-x}.$$

Part. lösning 1: Betrakta ekv. $y'' + 2y' + y = 2\cos(x)$

$= \mathrm{Re}(2e^{ix})$

Hjälpekv. $u'' + 2u' + u = 2e^{ix}$

Ansätt $u = z \cdot e^{ix}$ och vi får

$$e^{ix}\left(z'' + 2(1+i)z' + 2iz\right) = 2e^{ix}, \quad \text{dvs,}$$

$$z'' + 2(1+i)z' + 2iz = 2$$

Ansätt $z = A =$ en konstant $\Rightarrow A = \frac{2}{2i} = -i$

Det ger: $u = -ie^{ix}$ vilket betyder $y_{p_1} = \mathrm{Re}(-ie^{ix})$

$= \sin(x)$.

Part. lösning 2:

Betrakta ekv. $y'' + 2y' + y = x + 3$

Ansätt lösn. $y = Ax + B$. Ger att $y' = A$, $y'' = 0$, dvs,

$$2A + Ax + B = x + 3$$

Betyder att $A = 1$ och $B = 1$, dvs, $y_{p_2} = x + 1$ är en lösning.

Allmän lösn: $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$

$$= (C_1 x + C_2) e^{-x} + x + 1 + \sin(x).$$

6) Ekvationen som ska lösas är

$$h'(t) = K \cdot \sqrt{1 - h(t)} \qquad (H = 1).$$

Separera variabler:

$$\frac{dh}{dt} = K \cdot \sqrt{1-h} \Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{1-h}} = K \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int (1-h)^{-1/2} dh = \int K \cdot dt$$

$$\Rightarrow -\frac{(1-h)^{1/2}}{1/2} = Kt + C$$

Villkor: Definiera $t=0$ då $h = 0,19$.

$h(0) = 0,19$: $-2\sqrt{1-0,19} = C \iff C = -1,8$.

$h(4) = 0,75$: $-2\sqrt{1-0,75} = 4 \cdot K - 1,8 \iff K = 0,2$.

Dvs, $-2\sqrt{1-h} = 0,2t - 1,8$.

Behållaren är full då $h = 1$, dvs,

$$-2\sqrt{1-1} = 0.2t - 1.8 \iff t = \frac{1,8}{0,2} = 9 \text{ sekunder}$$

Då $h = 0$ så fås: $-2 = 0.2t - 1,8 \iff t = -1$.

Dvs, det tog 1 sekund att fylla från $h=0$ till $h = 0,19$.

Svar: Det tar 10 sekunder att fylla från tom behållare till full behållare.