Matematik LTH | **Lösningar: 2021–03–19**
Matematikcentrum | **FMA A50**
Lunds universitet | **Analys 2**

1. a) Ansats för partialbråksuppdelning

$$\frac{x^2-8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Detta ger

$$x^2-8 = A\cdot(x^2+4) + (Bx+C)\cdot x.$$

Identifiering av koefficienter:

$$\begin{cases} 4A & = -8 \\ & C = 0 \\ A+B & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-2 \\ B=3 \\ C=0 \end{cases}$$

Alltså,

$$\int \frac{x^2-8}{x(x^2+4)}dx = \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{3x}{x^2+4}\right)dx = -2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + C.$$

b)

$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C.$$

c)

$$\begin{aligned}\int_1^3 x^3 e^{x^2}dx &= \left[\begin{array}{c} t=x^2 \\ \frac{dt}{dx}=2x \Rightarrow xdx = \frac{dt}{2} \\ x=1\Rightarrow t=1 \\ x=3\Rightarrow t=9 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_1^9 te^t dt = [\text{Part. integration}] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\left[te^t\right]_1^9 - \int_1^9 e^t dt\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(9e^9 - e - \left[e^t\right]_1^9\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(9e^9-e-(e^9-e)\right) = 4e^9.\end{aligned}$$

2. Efter division med x^2 fås ekvationen

$$y' + \frac{3}{x}\cdot y = \frac{1}{x^2}\cdot e^{-x}, \quad x>0. \qquad (\star)$$

Detta är en linjär DE av första ordningen och kan lösas med metoden för integrerande faktor. Här är $g(x) = 3/x$ vilket ger $G(x) = 3\ln(x) = \ln(x^3)$ (observera att $x>0$). Därför blir IF $= e^{G(x)} = x^3$. Multiplicera $(\star)$ med IF.

$$x^3y' + 3x^2y = xe^{-x} \iff (x^3y)' = xe^{-x}.$$

Integration ger

$$x^3y = \int xe^{-x}dx = [\text{Part. integration}] = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Detta ger den allmänna lösningen

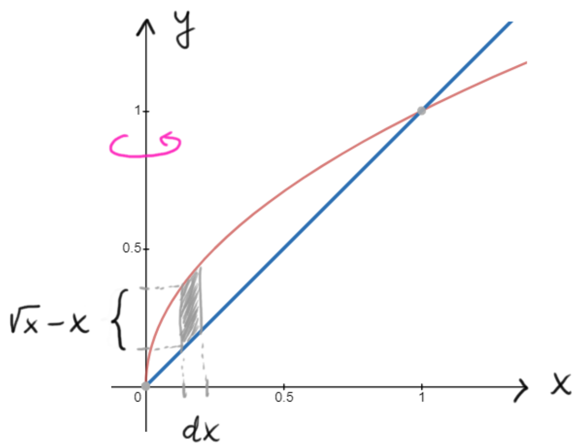
$$y = -\frac{1}{x^2}e^{-x} - \frac{1}{x^3}e^{-x} + \frac{C}{x^3}.$$

Det återstår att bestämma konstanten C. Villkoret $\lim_{x\to\infty} x^3y(x) = 2$ ger

$$\lim_{x\to\infty} x^3y(x) = \lim_{x\to\infty}(-xe^{-x} - e^{-x} + C) = C = 2.$$

$$\boxed{\text{Svar: } y = -\frac{1}{x^2}e^{-x} - \frac{1}{x^3}e^{-x} + \frac{2}{x^3}}$$

3. Låt området mellan kurvorna $y = \sqrt{x}$ och $y = x$, $0 \leq x \leq 1$, rotera kring y-axeln.



Betrakta "röret" som uppstår då strimlan med tjockleken dx och höjden $\sqrt{x} - x$ roterar kring y-axeln. Volymen av ett sådant rör blir

$$dV = 2\pi x(\sqrt{x} - x)dx,$$

vilket betyder

$$V = \int_0^1 dV = 2\pi \int_0^1 x(\sqrt{x} - x)dx = 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^2)dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = 2\pi\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{15}\ (v.e.)$$

4. a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)-2x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x - \frac{(2x)^2}{2} + (2x)^3 B(2x) - 2x}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2 + x^3 B_1(x)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} (-2 + x B_1(x)) \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Här är $B(x)$ och $B_1(x) = 2^3 B(2x)$ begränsade funktioner nära 0.

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - e^{x^2}}{1-\cos(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{(2x)^2}{2} + (2x)^4 B_1(2x) - (1 + x^2 + x^4 B_2(x^2))}{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + x^4 B_3(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2x^2 + x^4 B_4(x) - (1 + x^2 + x^4 B_5(x))}{\frac{x^2}{2} - x^4 B_3(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2 + x^4 B_6(x)}{\frac{x^2}{2} - x^4 B_3(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-3 + x^2 B_6(x)}{\frac{1}{2} - x^2 B_3(x)} \\
&= -6.
\end{aligned}$$

Här är $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, 6$, begränsade funktioner nära 0.

5. Vi vill lösa följande ekvation

$$y'' - 2y' + 2y = 2xe^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0. \qquad (\dagger)$$

Vi börjar med den homogena lösningen. Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 2r + 2 = 0$ har lösningen $r = 1 \pm i$. Detta ger den homogena lösningen

$$y_h(x) = e^x \cdot (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)).$$

Vi fortsätter med partikulärlösningen. Ansätt en lösning på formen $y_p = z \cdot e^{2x}$. Detta ger

$$\begin{aligned}
y_p' &= (z' + 2z)e^{2x} \\
y_p'' &= (z'' + 4z' + 4z)e^{2x}.
\end{aligned}$$

Sätt in dessa uttryck för y_p, y_p' och y_p'' i ($\dagger$) och dividera sedan med e^{2x}. Detta ger

$$(z'' + 4z' + 4z) - 2(z' + 2z) + 2z = 2x$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$z'' + 2z' + 2z = 2x \qquad (\star)$$

Ansätt $z = Ax + B$ där A och B är konstanter. Detta betyder att $z' = A$ och $z'' = 0$. Insatt i ($\star$) ger $0 + 2A + 2(Ax + B) = 2x$. Identifiering av A och B:

$$\begin{cases} 2A + 2B &= 0 \\ 2A &= 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Dvs, $y_p(x) = (x-1)e^{2x}$, vilket i sin tur ger

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^x \cdot (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + (x-1)e^{2x}.$$

Det som återstår är att bestämma konstanterna C_1 och C_2 genom att utnyttja villkoren $y(0) = y'(0) = 0$. Derivatan av $y(x)$ blir

$$\begin{aligned} y' = y_h' + y_p' &= e^x(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)) + e^x(-C_1\sin(x) + C_2\cos(x)) + 1\cdot e^{2x} + (x-1)2e^{2x} \\ &= e^x(C_1(\cos(x) - \sin(x)) + C_2(\sin(x) + \cos(x))) + e^{2x}(2x-1) \end{aligned}$$

Villkoret $y'(0) = 0$ ger att $C_1 + C_2 - 1 = 0$. Villkoret $y(0) = 0$ ger att $C_1 - 1 = 0$. Sammantaget betyder det att $C_1 = 1$ och $C_2 = 0$, och den slutliga lösningen blir

$$y(x) = e^x \cdot \cos(x) + (x-1)e^{2x}.$$

6. Integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx$$

är generaliserad i både 0 och ∞. Dela därför upp integralen i två delar. Exempelvis,

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx}_{=I_2}.$$

I intervallet $(0,1]$ gäller att $\sqrt{x+x^3} > \sqrt{x}$, vilket betyder att

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vi vet från Sats 13.11(2) att $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ är konvergent. Därför är även

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx$$

konvergent enligt jämförelsesats 13.10.

I intervallet $[1,\infty)$ är $\sqrt{x+x^3} > \sqrt{x^3} = x^{3/2}$, vilket betyder att

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^3}} < \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Vi vet från Sats 13.11(1) att $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx$ är konvergent. Därför är även

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+x^3}}dx$$

konvergent enligt jämförelsesats 13.10. Eftersom både I_1 och I_2 är konvergenta så är även $I = I_1 + I_2$ konvergent.