**Matematik LTH**
**Matematikcentrum**
**Lunds universitet**

**Lösningar: 2021–04–12**
**FMA A50**
**Analys 2**

**1. a)**

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x} \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{bmatrix} = \int e^t \cdot 2t dt = 2 \cdot \left(te^t - \int e^t dt\right) = 2 \cdot \left(te^t - e^t + C\right)$$
$$= 2 \cdot \left(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right) + D = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + D,$$

där $C$ och $D$ är konstanter.

**b)**

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\tan(x)} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = [\ln|\sin(x)|]_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln(\sqrt{3}/2) - \ln(1/2)$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln(3).$$

**c)**

$$\int \frac{1}{(x+2)^2 + 2} dx = \begin{bmatrix} t = x + 2 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dt$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{2} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

**2. a)** Ekvationen $y' - 2y = x$ är en 1a ordningens linjär DE som kan lösas med IF-metoden. Här är $g(x) = -2$, vilket ger $G(x) = -2x$. Därför blir IF $= e^{-2x}$. Multiplicera nu den ursprungliga ekvationen med IF. Detta ger

$$e^{-2x}y' - e^{-2x} \cdot 2y = e^{-2x}x$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(e^{-2x}y)' = e^{-2x}x$$

Integration ger

$$\begin{aligned} e^{-2x}y &= \int e^{-2x}x \\ &= x\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + \int \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} dx \\ &= \left(-\frac{x}{2}\right)e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2x} + C \\ &= -\frac{1}{4} \cdot e^{-2x}(2x+1) + C. \end{aligned}$$

Den slutliga lösningen blir alltså

$$y = -\frac{1}{4} \cdot (2x + 1) + C \cdot e^{2x}.$$

**b)**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(3x)}{y^2} &\iff \int y^2dy=\int\sin(3x)dx\\ &\iff \frac{y^3}{3}=-\frac{\cos(3x)}{3}+C\\ &\iff y^3=-\cos(3x)+D\end{aligned}$$

Villkoret $y(0)=2$ ger $8=-1+D \iff D=9$. Dvs,

$$y^3=9-\cos(3x)\quad\text{eller}\quad y=(9-\cos(3x))^{1/3}.$$

**3. a)** Maclaurinutveckling av $e^{2x}$,

$$\begin{aligned}e^{2x}&=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+(2x)^3B(2x)\\ &=1+2x+2x^2+x^3B_1(x).\end{aligned}$$

Maclaurinutveckling av $\ln(1+x)$,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^4B_2(x).$$

Detta ger

$$\begin{aligned}f(x)&=(1+2x+2x^2+x^3B_1(x))\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^4B_2(x)\right)\\ &=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^4B_2(x)\right)+\left(2x^2-x^3+\frac{2x^4}{3}+2x^5B_2(x)\right)\\ &+\left(2x^3-x^4+\frac{2x^5}{3}+2x^6B_2(x)\right)+x^3B_1(x)\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^4B_2(x)\right)\\ &=x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+x^4B_3(x).\end{aligned}$$

Alltså, Maclaurinpolynomet $p_3(x)$ blir

$$p_3(x)=x+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3.$$

**b)**

$$\begin{aligned}\frac{2x^3}{\sin(x)-\arctan(x)}&=\frac{2x^3}{x-\frac{x^3}{3!}+x^4B_1(x)-(x-\frac{x^3}{3}+x^4B_2(x))}\\ &=\frac{2x^3}{\frac{x^3}{6}+x^4B_3(x)}=\frac{2}{\frac{1}{6}+xB_3(x)}\to 12,\quad x\to 0.\end{aligned}$$

**4.** Vi vill lösa ekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 4. \tag{1}$$

Homogen lösning: Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ har lösningen $r_1 = 2$ och $r_2 = 1$. Dvs,

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x.$$

Partikulär lösning: Gör ansatsen $y_p(x) = z(x) \cdot e^{3x}$. Detta ger

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{3x}(z' + 3z) \\ y_p'' &= e^{3x}(z'' + 6z' + 9z). \end{aligned}$$

Insättning i (1) ger

$$e^{3x}(z'' + 6z' + 9z) - 3e^{3x}(z' + 3z) + 2ze^{3x} = e^{3x}(x^2 + x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$z'' + 3z' + 2z = x^2 + x. \tag{2}$$

Ansätt $z = Ax^2 + Bx + C$. Detta ger att $z' = 2Ax + B$ samt $z'' = 2A$. Insättningen i (2) ger

$$2A + 3 \cdot (2Ax + B) + 2 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x.$$

Identifiering av koefficienter:

$$\begin{cases} 2A & = 1 \\ 6A + 2B & = 1 \\ 2A + 3B + 2C & = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases}$$

Dvs, $z = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, vilket ger $y_p = (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x}$. Den allmänna lösningen blir

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right) e^{3x}.$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger att $C_1 + C_2 + 1 = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0$. Derivatan av $y$ blir

$$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^x + (x-1)e^{3x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right) 3e^{3x}.$$

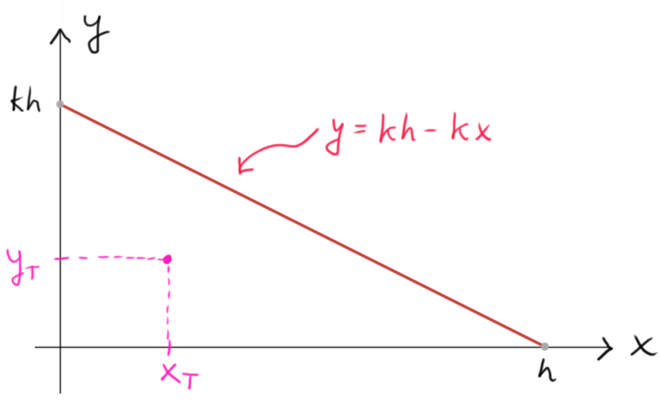
Villkoret $y'(0) = 4$ ger att $2C_1 + C_2 - 1 + 3 = 4 \Leftrightarrow 2C_1 + C_2 = 2$. Alltså, vi har ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

Lösningen blir

$$y(x) = 2e^{2x} - 2e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right) e^{3x}.$$

**5. a)** Vi börjar med tyngdpunkten i $x$-led. Eftersom triangeln är homogen så är densiteten $\rho(x) = \rho$ konstant.




Tyngdpunkten i $x$-led för kroppen (triangeln) $K$ beräknas enligt

$$x_T = \frac{\int_K x dm}{\int_K dm} = \frac{\int_0^h x\rho dA}{\int_0^h \rho dA} = \frac{\int_0^h x(kh - kx)dx}{\int_0^h (kh - kx)dx}$$
$$= \frac{[khx^2/2 - kx^3/3]_0^h}{[khx - kx^2/2]_0^h} = \frac{kh^3/6}{kh^2/2} = \frac{h}{3}$$

Tyngdpunkten i $y$-led blir pga symmetriskäl

$$y_T = \frac{kh}{3}.$$

(eller gör motsvarande beräkningar som i $x$-led).

Svar: $(x_T, y_T) = \left(\frac{h}{3}, \frac{kh}{3}\right)$.

**b)** Låt ytan mellan kurvan $y = \cos(2x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $x$-axeln och linjen $x = 0$ rotera kring $x$-axeln. Skär ut en skiva med bredden $dx$ och radien $y = \cos(2x)$. Volymen av denna skiva blir $dV = \pi y^2 dx$, vilket ger rotationsvolymen

$$V = \int_0^{\pi/4} \pi y^2 dx = \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2(2x)dx = \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos(4x)}{2} dx$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{\sin(4x)}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{8} \quad (v.e.)$$

**6.** Vi har integralekvationen

$$x \int_0^x y(t)dt = (x+1) \int_0^x ty(t)dt, \quad x > 0.$$

Derivera VL och HL genom att använda Analysens huvudsats. Det ger

$$\int_0^x y(t)dt + xy(x) = \int_0^x ty(t)dt + (x+1)xy(x).$$

Derivera ännu en gång. Det ger

$$y(x) + xy'(x) + y(x) = xy(x) + (x^2 + x)y'(x) + (2x+1)y(x).$$

Förenkling ger

$$x^2y' - (1-3x)y = 0 \iff y' + \frac{3x-1}{x^2}y = 0 \tag{$\star$}$$

Ekvationen ($\star$) löses t.ex. med IF-metoden. Här är

$$g(x) = \frac{3x-1}{x^2} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \Longrightarrow G(x) = 3\ln(x) + \frac{1}{x} \quad \text{(notera att } x > 0\text{)}.$$

Detta ger att IF $= e^{G(x)} = e^{3\ln(x)+1/x} = e^{\ln(x^3)+1/x} = x^3e^{1/x}$. Multiplicera ($\star$) med IF. Det ger

$$(yx^3e^{1/x})' = 0 \iff yx^3e^{1/x} = C \iff y = \frac{Ce^{-1/x}}{x^3}.$$