Lunds Tekniska Högskola **Lösningar**
Matematik **Analys 2, FMAA50**
Helsingborg **2020-08-17**

1. a) Partialintegration ger

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} f(x)=\cos(x) \Rightarrow F(x)=\sin(x) \\ g(x)=x \Rightarrow g'(x)=1 \end{bmatrix} \\
&= \sin(x)\cdot x - \int \sin(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= \sin(x)\cdot x - (-\cos(x)) + C \\
&= \sin(x)\cdot x + \cos(x) + C.
\end{aligned}$$

b) Variabelbyta ger

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t = x^2, \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \int \cos(t)\cdot \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sin(t) + C \\
&= \frac{1}{2}\sin\left(x^2\right) + C.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_1^{64} \frac{3x + 5\cdot\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{64} \frac{3x}{2\sqrt{x}} + \frac{5\cdot\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{64} \tfrac{3}{2}x^{1/2} + \tfrac{5}{2}x^{-1/6}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{5}{2}\cdot\frac{x^{5/6}}{5/6}\right]_1^{64} \\
&= \left[x^{3/2} + 3\cdot x^{5/6}\right]_1^{64} \\
&= \left(64^{3/2} + 3\cdot 64^{5/6}\right) - \left(1^{3/2} + 3\cdot 1^{5/6}\right) \\
&= 8^3 + 3\cdot 2^5 - (1 + 3\cdot 1) \\
&= 512 + 3\cdot 32 - 4 \\
&= 604.
\end{aligned}$$

2. a) Enligt standardutvecklingar gäller

$$\sin(x) = x + x^3 B_1(x) \qquad \text{och} \qquad \ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 B_2(x)$$

där $B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade i en omgivning av 0. Insättning ger

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - \sin(x) \cdot \ln(1+x)}{x^3} &= \frac{x^2 - \left(x + x^3 B_1(x)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 B_2(x)\right)}{x^3} \\
&= \frac{x^2 - \left(x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^4 B_3(x)\right)}{x^3} \\
&= \frac{\frac{1}{2}x^3 - x^4 B_3(x)}{x^3} \\
&= \tfrac{1}{2} - x B_3(x)
\end{aligned}$$

där $B_3(x)$ är begränsad i en omgivning av 0. Därför gäller

$$\frac{x^2 - \sin(x) \cdot \ln(1+x)}{x^3} = \tfrac{1}{2} - x B_3(x) \longrightarrow \tfrac{1}{2} \text{ för } x \to 0.$$

b) Insättning av $x = 1$ i integralekvationen ger

$$y(1) = \frac{3}{e} - \int_1^1 4t^3 \cdot y(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{e}.$$

Derivation av integralekvationen ger vha. Analysens Huvudsats att $y' = -4x^3 \cdot y$, varav $y' + 4x^3 \cdot y = 0$. Detta är en linjär första ordningens differentialekvation som lösas med integrerande faktor. Vi får $g(x) = 4x^3$, $G(x) = x^4$ och $\mathrm{IF} = e^{x^4}$. Multiplikation med IF ger

$$y' \cdot e^{x^4} + 4x^3 \cdot y \cdot e^{x^4} = 0 \Longleftrightarrow \left(y \cdot e^{x^4}\right)' = 0.$$

Alltså är

$$y \cdot e^{x^4} = C \Longleftrightarrow y(x) = C \cdot e^{-x^4}.$$

Villkoret $y(1) = \frac{3}{e}$ ger då

$$\frac{3}{e} = C \cdot e^{-1} \Longleftrightarrow C = 3.$$

Lösningen är alltså

$$y(x) = 3 \cdot e^{-x^4} = \frac{3}{e^{x^4}}.$$

3. a) Arean ges av integralen

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\begin{array}{c} t = x^2+9, \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right] \\
&= \int_9^{18} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_9^{18} \frac{1}{2} \cdot t^{-1/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_9^{18} \\
&= \sqrt{18} - 3 \\
&= 3\left(\sqrt{2} - 1\right).
\end{aligned}$$

b) Enligt skivformeln blir rotationsvolymen

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^3 \pi \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^3 \frac{x^2}{x^2+9}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Polynomdivision ger

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad 1 \\ \hline
x^2+9 & \quad x^2 \\
 & -x^2-9 \\ \hline
 & \quad -9
\end{array}$$

dvs. $\frac{x^2}{x^2+9} = 1 - \frac{9}{x^2+9}$. Alltså gäller

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^3 1 - \frac{9}{x^2+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^3 1 - \frac{1}{1+\left(x/3\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[x - 3 \cdot \arctan\left(x/3\right)\right]_0^3 \\
&= \pi \left(\left(3 - 3 \cdot \arctan(1)\right) - \left(0 - 3 \cdot \arctan(0)\right)\right) \\
&= \pi \left(3 - 3 \cdot \frac{\pi}{4} - 0\right) \\
&= 3\pi - \frac{3\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

4. Vi betraktar differentialekvationen

$$y'' - 3y' - 4y = 4 - 10x \cdot e^{-x}. \tag{1}$$

Karakteristiska ekvationen blir $r^2 - 3r - 4 = 0$ som har rötterna $r_1 = -1$ och $r_2 = 4$. Detta ger enligt Sats 15.2 lösningen

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$$

till den homogena ekvationen $y'' - 3y' - 4y = 0$.

Enligt resonemanget om linjäritet (s. 371) ges en partikulärlösing till (1) som $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ där

y_{p_1} är en partikulärlösning till $y'' - 3y' - 4y = 4$
y_{p_2} är en partikulärlösning till $y'' - 3y' - 4y = -10x \cdot e^{-x}$.

För ekvationen $y'' - 3y' - 4y = 4$ görs ansatsen $y = A$ vilket ger $y' = 0$ och $y'' = 0$. Insättning ger $0 - 3 \cdot 0 - 4A = 4$ varav $A = -1$. Alltså är $y_{p_1} = -1$.

För att hitta en partikulärlösning till $y'' - 3y' - 4y = -10x \cdot e^{-x}$ sätts $y = z \cdot e^{-x}$ varav

$$y' = z' \cdot e^{-x} + z \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (z' - z) \cdot e^{-x}$$

och

$$y'' = (z'' - z') \cdot e^{-x} + (z' - z) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (z'' - 2z' + z) \cdot e^{-x}.$$

Insättning i $y'' - 3y' - 4y = -10x \cdot e^{-x}$ ger

$$(z'' - 2z' + z) \cdot e^{-x} - 3(z' - z) \cdot e^{-x} - 4z \cdot e^{-x} = -10x \cdot e^{-x} \iff z'' - 5z' = -10x.$$

För at hitta en partikulärlösning till denna differentialekvation gör vi ansatsen $z = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$ varav $z' = 2Ax + B$ och $z'' = 2A$. Insättning ger

$$2A - 5(2Ax + B) = -10x.$$

Identifiering ger

$$\begin{cases} -10A &= -10 \\ 2A - 5B &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 1 \\ B &= 2/5 \end{cases}$$

dvs $z_p = x^2 + \frac{2}{5}x$. Detta ger partikulärlösningen $y_{p_2} = \left(x^2 + \frac{2}{5}x\right) \cdot e^{-x}$ till $y'' - 3y' - 4y = -10x \cdot e^{-x}$. En partikulärlösning till (1) är alltså

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = -1 + \left(x^2 + \tfrac{2}{5}x\right) \cdot e^{-x}.$$

Den fuldständiga lösningen till (1) är alltså

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - 1 + \left(x^2 + \tfrac{2}{5}x\right) \cdot e^{-x}.$$

Derivation ger

$$y' = -C_1 e^{-x} + 4C_2 e^{4x} + \left(2x + \tfrac{2}{5}\right) \cdot e^{-x} - \left(x^2 + \tfrac{2}{5}x\right) \cdot e^{-x}.$$

Villkoren $y(0) = \frac{1}{5}$ och $y'(0) = \frac{1}{5}$ ger

$$C_1 + C_2 - 1 = \tfrac{1}{5} \qquad \text{och} \qquad -C_1 + 4C_2 + \tfrac{2}{5} = \tfrac{1}{5}$$

varav $C_1 = 1$ och $C_2 = \frac{1}{5}$. Lösningen blir alltså

$$y(x) = e^{-x} + \tfrac{1}{5}e^{4x} - 1 + \left(x^2 + \tfrac{2}{5}x\right) \cdot e^{-x} = \left(x^2 + \tfrac{2}{5}x + 1\right) \cdot e^{-x} + \tfrac{1}{5}e^{4x} - 1.$$

5. Med

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}} \qquad \text{och} \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

gäller

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{1}{x+\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{x + \sqrt{x}} = \frac{1}{1 + {}^1\!/\!\sqrt{x}} \to \frac{1}{1+0} = 1 \quad (\neq 0, \neq \infty)$$

för $x \to \infty$. Dessutom gäller att $\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ är divergent enligt Sats 13.11(1). Sats 13.12 ger nu att

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

är divergent.

Andra integralen är integralen av en rationel funktion. Nöllställen för nämnaren $x^2 + 5x + 6$ är

$$x = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - 6} = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4} - 6} = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}} = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$

dvs. $x = -2$ och $x = -3$. Partialbröksuppdelning ger ansatsen

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}.$$

Multiplikation med $(x+2)(x+3)$ ger

$$1 = A(x+3) + B(x+2). \tag{2}$$

Insättning av $x = -2$ i (2) ger $1 = A + 0$ dvs. $A = 1$ och insättning av $x = -3$ i (2) ger $1 = 0 + B \cdot (-1)$ dvs. $B = -1$. Partialbröksuppdelningen blir alltså

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}.$$

Integration ger nu

$$\begin{aligned}
\int_1^X \frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x &= \int_1^X \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\ln\big(|x+2|\big) - \ln\big(|x+3|\big)\Big]_1^X \\
&= \left[\ln\left(\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\right)\right]_1^X \\
&= \ln\left(\frac{X+2}{X+3}\right) - \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1+\frac{2}{X}}{1+\frac{3}{X}}\right) - \ln\left(\frac{3}{4}\right) \\
&\longrightarrow \ln\left(\frac{1+0}{1+0}\right) - \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(1) - \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)
\end{aligned}$$

för $X \to \infty$. Andra integralen är därför konvergent med värden $\ln\big(4/3\big)$.

Alternativ: Första integralen kan också beräknes direkt

$$\begin{aligned}
\int_1^X \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{array}\right] \\
&= \int_1^{\sqrt{X}} \frac{1}{t^2+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_1^{\sqrt{X}} \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\Big[\ln\big(|t+1|\big)\Big]_1^{\sqrt{X}} \\
&= 2\ln\left(\sqrt{X}+1\right) - 2\ln(2) \\
&\longrightarrow \infty \text{ för } X \to \infty.
\end{aligned}$$

6. Ekvationen för tangenten i $(a, f(a))$ ges av $y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$. Då denna går igenom $\big(0, f(a)^2\big)$ gäller $f(a)^2 - f(a) = f'(a)\cdot(0-a)$. Detta måste gälla för alla $a > 0$ vilket ger differentialekvationen

$$y^2 - y = y'\cdot(-x) \tag{3}$$

(bytta a mot x och $f(a)$ mot y). Denna differentialekvation är separabel: Om $y^2 - y \neq 0$ gäller

$$\begin{aligned}
y^2 - y = y'\cdot(-x) &\Longleftrightarrow y^2 - y = \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot(-x) \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{y^2-y}\,\mathrm{d}y \\
&\Longleftrightarrow \int \frac{1}{-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^2-y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Partialbröksuppdelning ger ansatsen

$$\frac{1}{y^2-y} = \frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}.$$

Multiplikation med $y(y-1)$ ger

$$1 = A(y-1) + By. \tag{4}$$

Insättning av $y = 0$ i (4) ger $1 = A \cdot (-1) + 0$ dvs. $A = -1$ och insättning av $y = 1$ i (4) ger $1 = 0 + B$ dvs. $B = 1$. Partialbröksuppdelningen blir alltså

$$\frac{1}{y^2-y} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}.$$

Integration ger då

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^2-y}\,\mathrm{d}y &\iff -\ln\big(|x|\big) = \int -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y \\
&\iff -\ln(x) = -\ln\big(|y|\big) + \ln\big(|y-1|\big) + C \\
&\iff -\ln(x) = \ln\left(\left|\frac{y-1}{y}\right|\right) + C \\
&\iff -\ln(x) = \ln\left(\left|1-\frac{1}{y}\right|\right) + C \\
&\iff \frac{1}{x} = \left|1-\frac{1}{y}\right| \cdot e^C \\
&\iff \left|1-\frac{1}{y}\right| = \frac{e^{-C}}{x} \\
&\iff 1-\frac{1}{y} = \pm\frac{e^{-C}}{x} = \frac{D}{x},
\end{aligned}$$

med $D = \pm e^{-C} \neq 0$. Insättning av villkoret $y(1) = \frac{2}{3}$ ger

$$1 - \frac{1}{2/3} = \frac{D}{1} \iff D = -\tfrac{1}{2}.$$

Lösningen blir då

$$1 - \frac{1}{y} = \frac{-1/2}{x} \iff \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x} \iff y = \frac{2x}{2x+1}.$$

Om $y^2 - y = 0$ fås $y = 0$ eller $y = 1$ och insättning i (3) ger att (3) också har konstantlösningarna $y = 0$ och $y = 1$. Dessa uppfyllar dock inte villkoret $y(1) = \frac{2}{3}$. Lösningen är därför

$$y(x) = \frac{2x}{2x+1}, \quad x > 0.$$