Lunds Tekniska Högskola **Lösningar**
Matematik **Analys 2, FMAA50**
Helsingborg **2020-06-09**

1. a) Variabelbyta ger

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{3+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{c} t = 3+x^2, \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right] \\
&= \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\ln|t| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln|3+x^2| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(3+x^2\right) + C.
\end{aligned}
$$

b) Enligt formel (8.32) gäller

$$
\begin{aligned}
\int \left(\cos(5x)\right)^2\,\mathrm{d}x &= \left[\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}\right] \\
&= \int \frac{1+\cos(10x)}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int 1+\cos(10x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin(10x)}{10}\right) + C \\
&= \frac{x}{2} + \frac{\sin(10x)}{20} + C.
\end{aligned}
$$

c) Variabelbyta ger

$$
\begin{aligned}
\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{c} t = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = t^2+1 \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{array}\right] \\
&= \int_1^2 \frac{t^2+1}{t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 2t^2+2\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{2t^3}{3} + 2t\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{16}{3}+4\right) - \left(\frac{2}{3}+2\right) \\
&= \frac{20}{3}.
\end{aligned}
$$

Alternativ lösning: Variabelbytat $t = x - 1$ fungerar också

$$
\begin{aligned}
\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t = x-1 \Rightarrow x = t+1 \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} \\
&= \int_1^4 \frac{t+1}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{d}t \\
&= \int_1^4 t^{1/2} + t^{-1/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{t^{1/2}}{1/2}\right]_1^4 \\
&= \left[\frac{2}{3} \cdot t^{3/2} + 2 \cdot t^{1/2}\right]_1^4 \\
&= \left(\frac{2}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{2}{3} + 2\right) \\
&= \frac{20}{3}.
\end{aligned}
$$

2. **a)** Differentialekvationen är separabel. Då $y \neq 0$ och $e^x + e^{2x} > 0 + 0 = 0$ gäller

$$
\frac{y'}{e^x + e^{2x}} = \frac{1}{y} \iff \frac{1}{e^x + e^{2x}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} \iff y\,\mathrm{d}y = \left(e^x + e^{2x}\right)\mathrm{d}x,
$$

och integration ger då

$$
\int y\,\mathrm{d}y = \int e^x + e^{2x}\,\mathrm{d}x \iff \frac{y^2}{2} = e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C \iff y^2 = 2e^x + e^{2x} + 2C.
$$

Villkoret $y(0) = -2$ ger

$$
(-2)^2 = 2e^0 + e^{2\cdot 0} + 2C = 2 + 1 + 2C \iff C = 1/2.
$$

Alltså gäller

$$
y^2 = 2e^x + e^{2x} + 2 \cdot 1/2 = (e^x)^2 + 2e^x + 1 = (e^x + 1)^2 \iff y = \pm\left(e^x + 1\right).
$$

Då $y(0) = -2$ blir lösningen alltså

$$
y = -\left(e^x + 1\right) = -e^x - 1.
$$

b) Ekvationen är en linjär differentialekvation av 1:a ordningen som lösas med integrerande faktor. Då $x \neq 0$ skrivs om till standardform

$$
y' - \frac{1}{x} \cdot y = x \cdot \sin(3x). \tag{1}
$$

Med $g(x) = -\frac{1}{x}$ fås

$$
\int -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln(x) + C
$$

vilket ger $G(x) = -\ln(x)$. Integrerande faktorn blir då

$$\text{IF} = e^{G(x)} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}.$$

Multiplikation av (1) med IF ger

$$\left(\frac{1}{x} \cdot y\right)' = \frac{1}{x} \cdot y' - \frac{1}{x^2} \cdot y = \sin(3x).$$

Integration ger

$$\frac{1}{x} \cdot y = \int \sin(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(3x)}{3} + C,$$

varav

$$y = -\frac{x \cdot \cos(3x)}{3} + Cx.$$

Insättning av $y\left({}^{\pi}\!/_{6}\right) = {}^{\pi}\!/_{3}$ ger

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{3} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + C \cdot \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{\pi}{18} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \cdot \frac{\pi}{6} \\ &= 0 + C \cdot \frac{\pi}{6} \\ &= C \cdot \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

varav $C = \dfrac{{}^{\pi}\!/_{3}}{{}^{\pi}\!/_{6}} = 2$. Lösningen är alltså

$$y = -\frac{x \cdot \cos(3x)}{3} + 2x.$$

3. a) Variabelbyta ger

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\begin{matrix} t = \ln(x) \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{matrix}\right] \\ &= \int_1^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Alternativ lösning: Partialintegration ger

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} f(x) = {}^1\!/\!_x \Rightarrow F(x) = \ln(x) \\ g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = {}^1\!/\!_x \end{bmatrix}$$

$$= \big[\ln(x)\cdot\ln(x)\big]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \ln(x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Överflytning till vänsterledet ger nu

$$2\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(x)\cdot\ln(x)\big]_e^{e^2}$$

varför

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\big[\ln(x)\cdot\ln(x)\big]_e^{e^2} \\ &= \frac{1}{2}\Big[\big(\ln(x)\big)^2\Big]_e^{e^2} \\ &= \frac{1}{2}\big(2^2 - 1^2\big) \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

b) Variabelbyta ger

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+6}\,\mathrm{d}x = \Big[t = e^x, \quad \tfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = e^x \Rightarrow \mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x\Big] = \int \frac{1}{t^2+5t+6}\,\mathrm{d}t.$$

Vi gör nu partialbröksuppdelning. Enligt pq-formeln har $t^2+5t+6=0$ rötterna

$$t = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - 6} = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4} - 6} = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}} = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2},$$

dvs. $t=-2$ och $t=-3$. Ansatsen blir alltså

$$\frac{1}{t^2+5t+6} = \frac{1}{(t+2)(t+3)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t+3}.$$

Multipliceras med $(t+2)(t+3)$ på båda sidor erhålls

$$1 = A(t+3) + B(t+2). \tag{2}$$

Vi beräknar nu A och B genom att sätta in lämpliga t (nämnarens nollställen) i (2). Nollstället $t=-2$ ger

$$1 = A + 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = 1,$$

och nollstället $t=-3$ ger

$$1 = 0 - B \qquad \Longleftrightarrow \qquad B = -1.$$

Vi får $\frac{1}{t^2+6t+5} = \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}$. Alltså gäller

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+6}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t^2+5t+6}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln\big(|t+2|\big) - \ln\big(|t+3|\big) + C \\ &= \ln\big(|e^x+2|\big) - \ln\big(|e^x+3|\big) + C \\ &= \ln(e^x+2) - \ln(e^x+3) + C \\ &= \ln\left(\frac{e^x+2}{e^x+3}\right) + C.\end{aligned}$$

4. Vi betraktar differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = 12x^2 \cdot e^{2x}. \tag{3}$$

Karakteristiska ekvationen är $r^2 - 4r + 4 = 0$ som har dubbelroten $r_{1,2} = 2$. Detta ger enligt Sats 15.2 lösningen

$$y_h = (C_1 x + C_2)\, e^{2x}$$

till den homogena ekvationen $y'' - 4y' + 4y = 0$.

För att hitta en partikulärlösning till (3) sätts $y = z \cdot e^{2x}$ varav

$$y' = z' \cdot e^{2x} + z \cdot e^{3x} \cdot 2 = (z' + 2z) \cdot e^{2x}$$

och

$$y'' = (z'' + 2z') \cdot e^{2x} + (z' + 2z) \cdot e^{2x} \cdot 2 = (z'' + 4z' + 4z) \cdot e^{2x}.$$

Insättning i (3) ger

$$(z'' + 4z' + 4z) \cdot e^{2x} - 4(z' + 2z) \cdot e^{2x} + 4z \cdot e^{2x} = 12x^2 \cdot e^{2x} \iff z'' = 12x^2.$$

Integration två gångar ger partikulärlösningen

$$\int 12x^2\,\mathrm{d}x = 4x^3 + C, \quad z_p' = 4x^3; \qquad \int 4x^3\,\mathrm{d}x = x^4 + D, \quad z_p = x^4.$$

(Alternativt kan man använda ansatsen

$$z = x^2\big(Ax^2 + Bx + C\big) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$

men detta leder till längare beräkningar.) Detta ger partikulärlösningen $y_p = x^4 \cdot e^{2x}$ till (3), som alltså har den fuldständiga lösningen

$$y = y_h + y_p = (C_1 x + C_2)\, e^{2x} + x^4 \cdot e^{2x} = \big(x^4 + C_1 x + C_2\big)\, e^{2x}.$$

Derivation ger

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(4x^3 + C_1\right) e^{2x} + \left(x^4 + C_1 x + C_2\right) e^{2x} \cdot 2 \\
&= \left(4x^3 + C_1 + 2x^4 + 2C_1 x + 2C_2\right) e^{2x} \\
&= \left(2x^4 + 4x^3 + 2C_1 x + C_1 + 2C_2\right) e^{2x}.
\end{aligned}
$$

Villkoren $y(1) = 2e^2$ och $y'(1) = 6e^2$ ger

$$
\left\{ \begin{array}{ccc} (1 + C_1 + C_2)\, e^2 & = & 2e^2 \\ (2 + 4 + 2C_1 + C_1 + 2C_2)\, e^2 & = & 6e^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} C_1 + C_2 & = & 1 \\ 3C_1 + 2C_2 & = & 0 \end{array} \right.
$$

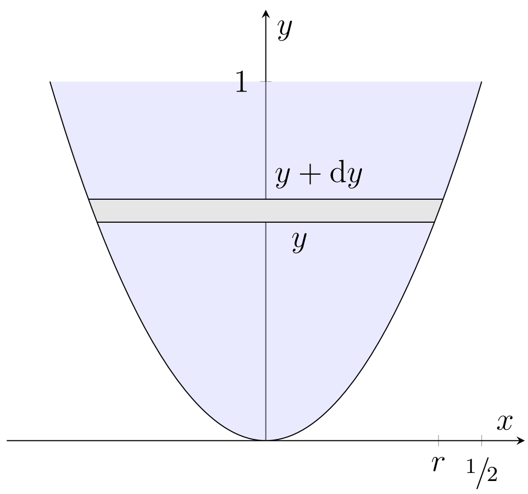
varav $C_1 = -2$ och $C_2 = 3$. Lösningen blir alltså

$$
y(x) = \left(x^4 - 2x + 3\right) e^{2x}.
$$

5. Låt $\rho(y) = 8 - 5y^3$ beteckna vätskans densitet på höjden y. På höjden y från skålens botten skärs en skiva med tjockleken dy ut. Skivans massa blir:

$$
\mathrm{d}m = \rho(y)\, \mathrm{d}V = \rho(y) \cdot \pi r^2\, \mathrm{d}y,
$$

där r betecknar radien vid höjd y.



Enligt figuren ovan gäller $y = 4r^2$. Vi har alltså $r = \sqrt{y}/2$. Vätskans totala massa blir alltså

$$
\begin{aligned}
m &= \int \mathrm{d}m \\
&= \int_0^1 \rho(y) \cdot \pi r^2 \,\mathrm{d}y \\
&= \pi \int_0^1 \left(8 - 5y^3\right) \cdot \left(\sqrt{y}/2\right)^2 \mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^1 \left(8 - 5y^3\right) \cdot y \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^1 8y - 5y^4 \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi}{4} \left[4y^2 - y^5\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} \big((4-1) - (0-0)\big) \\
&= \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

6. Maclaurinpolynomet till $y(x)$ av ordning 3 ges enligt definitionen av

$$
p_3(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{6}x^3. \tag{4}
$$

Vi måste alltså bestämma värden $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ och $y'''(0)$. Insättning av $x = 0$ ger

$$
y(0) = 0 + \int_0^0 \sin(y(t))\,\mathrm{d}t = 0 + 0 = 0.
$$

Derivation av integralekvationen kombinerat med Analysens huvudsats ger

$$
y'(x) = 1 + \sin(y(x)). \tag{5}
$$

Derivation av (5) två gångar ger enligt kedjeregeln

$$
y''(x) = 0 + \cos(y(x)) \cdot y'(x) = \cos(y(x)) \cdot y'(x)
$$

och

$$
\begin{aligned}
y'''(x) &= D\left(\cos(y(x))\right) \cdot y'(x) + \cos(y(x)) \cdot D\left(y'(x)\right) \\
&= -\sin\left(y(x)\right) \cdot y'(x) \cdot y'(x) + \cos(y(x)) \cdot y''(x) \\
&= -\sin\left(y(x)\right) \cdot \left(y'(x)\right)^2 + \cos(y(x)) \cdot y''(x).
\end{aligned}
$$

Insättning av $x = 0$ i de tre ekvationer ovan ger

$$\begin{aligned}
y'(0) &= 1 + \sin(y(0)) \\
&= 1 + \sin(0) \\
&= 1, \\
y''(0) &= \cos(y(0)) \cdot y'(0) \\
&= \cos(0) \cdot 1 \\
&= 1, \\
y'''(0) &= -\sin\big(y(0)\big) \cdot \big(y'(0)\big)^2 + \cos(y(0)) \cdot y''(0) \\
&= -\sin(0) \cdot 1^2 + \cos(0) \cdot 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Maclaurinpolynomet av ordning 3 till $y(x)$ är alltså

$$p_3(x) = 0 + 1 \cdot x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$