Lunds Tekniska Högskola **Lösningar**
Matematik **Analys 2, FMA645**
Helsingborg **2020-04-20**

1. a)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{9}\int \frac{1}{\frac{x^2}{9}+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{9}\arctan\left({}^{x}\!/_{3}\right)\cdot 3 + C \\ &= \frac{1}{3}\arctan\left({}^{x}\!/_{3}\right) + C.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{c} t = x^2+9, \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x \Rightarrow x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right] \\ &= \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln|t| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right) + C.\end{aligned}$$

c) Polynomdivision ger

$$\begin{array}{r|l} & x \quad -9 \\ \hline x+9 & x^2 \\ & -x^2-9x \\ \cline{2-2} & \qquad -9x \\ & \qquad 9x+81 \\ \cline{2-2} & \qquad\quad 81 \end{array}$$

dvs $\frac{x^2}{x+9} = x - 9 + \frac{81}{x+9}$. Alltså gäller

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x+9}\,\mathrm{d}x &= \int x - 9 + \frac{81}{x+9}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} - 9x + 81\ln|x+9| + C.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) \\ g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \end{bmatrix} \\
&= \big[-\cos(x) \cdot x\big]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} -\cos(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= \left(-\cos({}^{\pi}\!/_{3}) \cdot \frac{\pi}{3} + \cos(0) \cdot 0\right) + \int_0^{\pi/3} \cos(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + \big[\sin(x)\big]_0^{\pi/3} \\
&= -\frac{\pi}{6} + \sin({}^{\pi}\!/_{3}) - \sin(0) \\
&= -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

2. a) Enligt skivformeln blir rotationsvolymen

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/3} \pi \left(\sin(3x)\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \left[\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}\right] \\
&= \pi \int_0^{\pi/3} \frac{1 - \cos(6x)}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/3} 1 - \cos(6x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin(6x)}{6}\right]_0^{\pi/3} \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin(2\pi)}{6}\right) - \left(0 - \frac{\sin(0)}{6}\right) \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{\pi}{3} - \frac{0}{6}\right) - \left(0 - \frac{0}{6}\right) \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

b) Med $f(x) = \sqrt{1 + 3x} = (1 + 3x)^{1/2}$ blir

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 3x)^{-1/2} \cdot 3 = \frac{3}{2} \cdot (1 + 3x)^{-1/2}$$

och

$$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1+3x)^{-3/2} \cdot 3 = -\frac{9}{4} \cdot (1+3x)^{-3/2}.$$

Insättning ger

$$f(1) = 4^{1/2} = 2, \quad f'(1) = \frac{3}{2} \cdot 4^{-1/2} = \frac{3}{4} \quad \text{och} \quad f''(1) = -\frac{9}{4} \cdot 4^{-3/2} = -\frac{9}{32}.$$

Taylorpolynomet blir alltså

$$p_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = 2 + \frac{3}{4}(x-1) - \frac{9}{64}(x-1)^2.$$

3. **a)** Differentialekvationen är separabel. För $x > 0$ gäller

$$2x\sqrt{x} \cdot y' = e^{2y} \iff 2x^{3/2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{2y} \iff 2e^{-2y}\,\mathrm{d}y = x^{-3/2}\,\mathrm{d}x,$$

och integration ger då

$$\int 2e^{-2y}\,\mathrm{d}y = \int x^{-3/2}\,\mathrm{d}x \iff -e^{-2y} = \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C = C - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Villkoret $y(4) = 0$ ger

$$-e^{-2\cdot 0} = C - \frac{2}{\sqrt{4}} \iff -1 = C - 1 \iff C = 0.$$

Alltså gäller

$$-e^{-2y} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \iff e^{-2y} = \frac{2}{\sqrt{x}} \iff -2y = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(x).$$

Lösningen är alltså

$$y = \frac{1}{4}\ln(x) - \frac{1}{2}\ln(2).$$

b) Ekvationen är en linjär differentialekvation av 1:a ordningen som lösas med integrerande faktor. Observara att vi har $x > 0$ då $\ln(x)$ finns med i högraledet. Omskrivning ger

$$x \cdot y' + y = x \cdot \ln(x).$$

Division med x ger nu

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = \ln(x). \tag{1}$$

Med $g(x) = \frac{1}{x}$ fås

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x) + C$$

vilket ger $G(x) = \ln(x)$. Integrerande faktorn blir då

$$\mathrm{IF} = e^{G(x)} = e^{\ln(x)} = x.$$

Multiplikation av (1) med IF ger

$$(x \cdot y)' = x \cdot y' + y = x \cdot \ln(x).$$

Integration ger

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= \int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} f(x) = x \Rightarrow F(x) = x^2/2 \\ g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = 1/x \end{bmatrix} \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \int x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} + C.
\end{aligned}$$

Lösningen är alltså

$$y = \frac{x}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}.$$

4. Vi betraktar differentialekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = 4x^2 \cdot e^{3x}. \tag{2}$$

Karakteristiska ekvationen blir $r^2 - 3r + 2 = 0$ som har rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = 2$. Detta ger enligt Sats 15.2 lösningen

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

till den homogena ekvationen $y'' - 3y' + 2y = 0$.

För att hitta en partikulärlösning till (2) sätts $y = z \cdot e^{3x}$ varav

$$y' = z' \cdot e^{3x} + z \cdot e^{3x} \cdot 3 = (z' + 3z) \cdot e^{3x}$$

och

$$y'' = (z'' + 3z') \cdot e^{3x} + (z' + 3z) \cdot e^{3x} \cdot 3 = (z'' + 6z' + 9z) \cdot e^{3x}.$$

Insättning i (2) ger

$$(z'' + 6z' + 9z) \cdot e^{3x} - 3(z' + 3z) \cdot e^{3x} + 2z \cdot e^{3x} = 4x^2 \cdot e^{3x} \iff z'' + 3z' + 2z = 4x^2.$$

För at hitta en partikulärlösning till denna differentialekvation gör vi ansatsen $z = Ax^2 + Bx + C$ varav $z' = 2Ax + B$ och $z'' = 2A$. Insättning ger

$$2A + 3(2Ax + B) + 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 4x^2.$$

Identifiering ger

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2A & = & 4 \\ 6A + 2B & = & 0 \\ 2A + 3B + 2C & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} A & = & 2 \\ B & = & -6 \\ C & = & 7 \end{array}\right.$$

dvs $z_p = 2x^2 - 6x + 7$. Detta ger partikulärlösningen $y_p = \big(2x^2 - 6x + 7\big) \cdot e^{3x}$ till (2) som alltså har den fuldständiga lösningen

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \big(2x^2 - 6x + 7\big) \cdot e^{3x}.$$

Derivation ger

$$\begin{aligned} y' &= C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + (4x - 6) \cdot e^{3x} + \big(2x^2 - 6x + 7\big) \cdot e^{3x} \cdot 3 \\ &= C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + \big(6x^2 - 14x + 15\big) \cdot e^{3x}. \end{aligned}$$

Villkoren $y(0) = 7$ och $y'(0) = 14$ ger

$$C_1 + C_2 + 7 = 7 \qquad \text{och} \qquad C_1 + 2C_2 + 15 = 14$$

varav $C_1 = 1$ och $C_2 = -1$. Lösningen blir alltså

$$y(x) = e^x - e^{2x} + \big(2x^2 - 6x + 7\big) \cdot e^{3x}.$$

5. Partialbröksuppdelning ger följande ansats

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x\,(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Multiplikation med $x\,\big(x^2 + 1\big)$ ger

$$1 = A\,\big(x^2 + 1\big) + (Bx + C)x. \tag{3}$$

Insättning av $x = 0$ i (3) ger $1 = A + 0$ dvs $A = 1$. Ekvation (3) ger nu

$$(Bx + C)\,x = 1 - A\,\big(x^2 + 1\big) = 1 - \big(x^2 + 1\big) = -x^2 \iff Bx + C = -x.$$

Partialbröksuppdelningen blir alltså

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

För $a, b > 0$ gäller alltså

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{x^3 + x}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\ln(x) - \frac{1}{2}\ln\big(x^2 + 1\big)\right]_a^b \\ &= \left[-\frac{1}{2}\Big(\ln\big(x^2 + 1\big) - 2\ln(x)\Big)\right]_a^b \\ &= \left[-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)\right]_a^b \\ &= \left[-\frac{1}{2}\ln\big(1 + {}^1\!/_{x^2}\big)\right]_a^b \\ &= -\frac{1}{2}\ln\big(1 + {}^1\!/_{b^2}\big) + \frac{1}{2}\ln\big(1 + {}^1\!/_{a^2}\big) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + {}^1\!/_{a^2}}{1 + {}^1\!/_{b^2}}\right). \end{aligned}$$

Den första generaliserade integralen blir alltså

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{T\to\infty}\int_1^T \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+{}^1\!/_{1^2}}{1+{}^1\!/_{T^2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+1}{1+0}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

Den generaliserede integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$ är alltså konvergent med värdet $\frac{1}{2}\ln(2)$.

Den andra generaliserade integral blir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+{}^1\!/_{\varepsilon^2}}{1+{}^1\!/_{1^2}}\right)\\ &= \infty.\end{aligned}$$

Den generaliserede integralen $\int_0^1 \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$ är alltså divergent.

6. Låt $V(t)$ beteckna mängden av syralösning i behållaren (enhet ℓ) vid tiden t (enhet minutter), då gäller $V(t) = 20 + 2t$. Låt $y(t)$ beteckna mängden syra (enhet ℓ) till tiden tiden t, då gäller $y(0) = 20 \cdot 1\% = 20 \cdot 0.01$. Enligt uppgiften gäller

$$\begin{aligned}m_{\text{in}} &= 3\,\ell/\text{minut}\cdot 99\% = 3\cdot 0.99\,\ell/\text{minut},\\ m_{\text{ut}} &= 1\,\ell/\text{minut}\cdot\frac{y(t)}{V(t)}.\end{aligned}$$

Derivaten $y'(t)$ anger ökningen i mängden syra per tidsenhet, dvs vi har $y'(t) = m_{\text{in}} - m_{\text{ut}}$ (enhet ℓ/minut) vilket ger

$$y'(t) = 3\cdot 0.99 - \frac{y(t)}{V(t)} = 3\cdot 0.99 - \frac{y(t)}{20+2t}.$$

Vi får alltså

$$y' + \frac{y}{20+2t} = 3\cdot 0.99.$$

Detta är en linjär första ordningens differentialekvation som lösas med integrerande faktor. Vi får $g(t) = \frac{1}{20+2t}$, $G(t) = \frac{1}{2}\ln(20+2t)$ och $\text{IF} = (20+2t)^{1/2}$. Multiplikation med IF ger

$$\begin{aligned}y'\cdot(20+2t)^{1/2} + y\cdot(20+2t)^{-1/2} = 3\cdot 0.99\cdot(20+2t)^{1/2} &\iff\\ \left(y\cdot(20+2t)^{1/2}\right)' &= 3\cdot 0.99\cdot(20+2t)^{1/2}.\end{aligned}$$

Integration ger

$$y \cdot (20+2t)^{1/2} = \int 3 \cdot 0.99 \cdot (20+2t)^{1/2}\,\mathrm{d}t = 3 \cdot 0.99 \cdot \frac{(20+2t)^{3/2}}{3/2} \cdot \frac{1}{2} + C$$

varav

$$y(t) = 0.99 \cdot (20+2t) + C \cdot (20+2t)^{-1/2}.$$

Villkoret $y(0) = 20 \cdot 0.01$ ger då

$$20 \cdot 0.01 = 0.99 \cdot 20 + C \cdot 20^{-1/2} \iff C = -0.98 \cdot 20 \cdot 20^{1/2} = -0.98 \cdot 20^{3/2}.$$

Vi söker nu t_1 så att koncentrationen till tiden t_1 är 49%:

$$\begin{aligned}
\frac{y(t_1)}{V(t_1)} = 0.49 &\iff \frac{0.99 \cdot (20+2t_1) - 0.98 \cdot 20^{3/2} \cdot (20+2t_1)^{-1/2}}{20+2t_1} = 0.49 \\
&\iff 0.99 - 0.98 \cdot 20^{3/2} \cdot (20+2t_1)^{-3/2} = 0.49 \\
&\iff 0.98 \cdot 20^{3/2} \cdot (20+2t_1)^{-3/2} = 0.5 \\
&\iff (20+2t_1)^{-3/2} = \frac{0.5}{0.98} \cdot 20^{-3/2} \\
&\iff 20 + 2t_1 = \left(\frac{0.5}{0.98}\right)^{-2/3} \cdot 20 = 1.96^{2/3} \cdot 20 \\
&\iff t_1 = 10 \cdot \left(1.96^{2/3} - 1\right).
\end{aligned}$$

(Med miniräknare fås $t_1 \cong 5.66$ minutter.)