Lunds Tekniska Högskola **Lösningar**
Matematik **Analys 2, FMAA50**
Helsingborg **2020-03-20**

1. a)

$$\begin{aligned}\int x\cdot(3x^2+4)^6\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} t=3x^2+4, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=6x \\ \implies \frac{1}{6}\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x\end{bmatrix} \\ &= \int \tfrac{1}{6}t^6\,\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{42}t^7 + C \\ &= \tfrac{1}{42}(3x^2+4)^7 + C.\end{aligned}$$

b) Vi har

$$\int \frac{16}{x^2-16}\,\mathrm{d}x = \int \frac{16}{(x-4)(x+4)}\,\mathrm{d}x$$

Partialbråksuppdelning ger ansatsen

$$\frac{16}{(x-4)(x+4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4}$$

Multiplikation med $(x-4)(x+4)$ på båda sidor ger

$$16 = A(x+4) + B(x-4). \tag{1}$$

Vi beräknar nu A och B genom att sätta in lämpliga x (nämnarens nollställen) i (1). Nollstället $x=4$ ger

$$16 = 8A + 0 \quad\iff\quad A = 2.$$

och nollstället $x=-4$ ger

$$16 = 0 - 8B \quad\iff\quad B = -2.$$

Vi får då

$$\frac{16}{(x-4)(x+4)} = \frac{2}{x-4} - \frac{2}{x+4}$$

Integration ger nu:

$$\begin{aligned}\int \frac{16}{(x-4)(x+4)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{x-4} - \frac{2}{x+4}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(|x-4|) - 2\ln(|x+4|) + C \\ &= 2\ln\left(\left|\frac{x-4}{x+4}\right|\right) + C.\end{aligned}$$

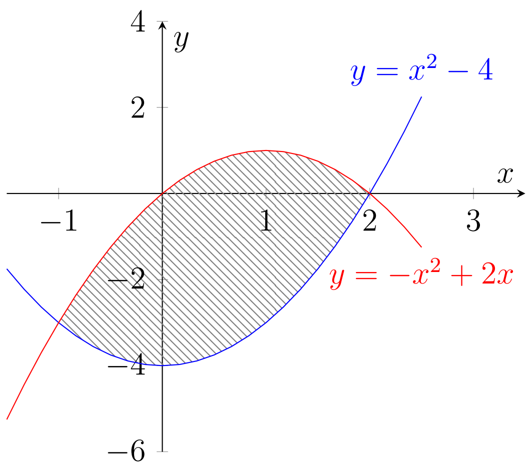
c)

$$
\begin{aligned}
\int_1^e x^3 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 \\ g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = {}^1\!/_x \end{bmatrix} \\
&= \left[\frac{1}{4}x^4 \cdot \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{e^4}{4} - 0\right) - \frac{1}{4}\int_1^e x^3\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^e \\
&= \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{e^4}{4} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} \\
&= \frac{3e^4 + 1}{16}.
\end{aligned}
$$

2. a) Skärningen mellan kurvorna ges av

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4 = -x^2 + 2x &\iff 2x^2 - 2x - 4 = 0 \\
&\iff x^2 - x - 2 = 0 \\
&\iff x = -1 \quad \text{eller} \quad x = 2.
\end{aligned}
$$

Ritas kurvorna fås följande figur där det skuggade område är det som innesluts av kurvorna.



Arean blir alltså

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \left(-x^2+2x\right)-\left(x^2-4\right) \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} -2x^2+2x+4 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2} \\
&= \left(-\frac{16}{3}+4+8\right)-\left(\frac{2}{3}+1-4\right) \\
&= -\frac{16}{3}+12-\frac{2}{3}+3 \\
&= 9.
\end{aligned}
$$

b) Volymen blir enligt skivformeln (jmf. (14.6))

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi \left(x+\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^1 x^2+2x\sqrt{x}+x \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^1 x^2+2x^{3/2}+x \,\mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5/2}x^{5/2}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \pi \left(\frac{1}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}-0\right) \\
&= \frac{49\pi}{30}.
\end{aligned}
$$

3. a) Ekvationen är en linjär differentialekvation av 1:a ordningen som lösas med integrerande faktor. Division med x^2 ger

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{6}{x^2+1}. \tag{2}$$

Med $g(x) = \frac{1}{x}$ fås

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + C = \ln(x) + C$$

vilket ger $G(x) = \ln(x)$. Integrerande faktorn blir då

$$\mathrm{IF} = e^{G(x)} = e^{\ln(x)} = x.$$

Multiplikation av (2) med IF ger

$$(x \cdot y)' = x \cdot y' + y = \frac{6x}{x^2+1}.$$

Integration ger

$$x \cdot y = \int \frac{6x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 3\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

Insättning av villkoret $y(1) = \ln(8)$ ger

$$1 \cdot \ln(8) = 3\ln(2) + C \Longleftrightarrow C = 0$$

varav

$$x \cdot y = 3\ln\left(x^2+1\right).$$

Lösningen är alltså

$$y = \frac{3\ln\left(x^2+1\right)}{x}, \quad x > 0.$$

b) Insättning av $x = 0$ ger villkoret

$$f(0) = -1 + \int_0^0 f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = -1 + 0 = -1.$$

Derivering av ekvationen ger enligt Analysens Huvudsats $f'(x) = 0 + f(x)\cos(x)$. Alltså är $y' = y \cdot \cos(x)$ med $y = f(x)$. Ekvationen är en linjär differentialekvation av 1:a ordningen som lösas med integrerande faktor. Omskrivning ger

$$y' - \cos(x) \cdot y = 0 \tag{3}$$

varav $g(x) = -\cos(x)$. Alltså är $G(x) = -\sin(x)$ och integrerande faktorn blir då

$$\mathrm{IF} = e^{G(x)} = e^{-\sin(x)}.$$

Multiplikation av (3) med IF ger

$$\left(e^{-\sin(x)} \cdot y\right)' = e^{-\sin(x)} \cdot y' - e^{-\sin(x)} \cdot \cos(x) \cdot y = 0.$$

Integration ger

$$e^{-\sin(x)} \cdot y = \int 0\,\mathrm{d}x = C.$$

Insättning av villkoret $y(0) = -1$ ger

$$e^{-0} \cdot (-1) = C \Longleftrightarrow C = -1$$

varav

$$e^{-\sin(x)} \cdot y = -1.$$

Lösningen är alltså

$$y = -e^{\sin(x)}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Anmärkning: Differentialekvationen $y' = y \cdot \cos(x)$ kan också lösas som separabel differentialekvation, men metoden med integrerande faktor är att föredra.

4. a) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x) - 3\ln(1+x)}{1-\cos(x)} \tag{0.5}$$

Enligt standardutvecklingar gäller

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^3 B_1(t) \qquad \text{och} \qquad \cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 B_2(x)$$

där $B_1(t)$ och $B_2(x)$ är begränsade i en omgivning av 0. Insättning av dessa ger

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+3x) - 3\ln(1+x)}{1-\cos(x)} &= \frac{(3x) - \frac{(3x)^2}{2} + (3x)^3 B_1(3x) - 3\left(x - \frac{x^2}{2} + x^3 B_1(x)\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 B_2(x)\right)} \\
&= \frac{3x - \frac{9}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2}x^2 + x^3 B_3(x)}{1 - 1 + \frac{1}{2}x^2 - x^3 B_2(x)} \\
&= \frac{-3x^2 + x^3 B_3(x)}{\frac{1}{2}x^2 - x^3 B_2(x)} \\
&= \frac{-3 + x B_3(x)}{\frac{1}{2} - x B_2(x)}
\end{aligned}$$

där $B_3(x)$ är begränsad i en omgivning av 0. Därför gäller

$$\frac{\ln(1+3x) - 3\ln(1+x)}{1-\cos(x)} = \frac{-3 + x B_3(x)}{\frac{1}{2} - x B_2(x)} \longrightarrow \frac{-3+0}{\frac{1}{2}+0} = -6 \text{ för } x \to 0.$$

b) Med

$$f(x) = \frac{1}{x + e^{-x}} \qquad \text{och} \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

gäller

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{1}{x+e^{-x}}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{x+e^{-x}} = \frac{1}{1 + {}^1\!/\!(x\cdot e^x)} \to \frac{1}{1+0} = 1 \quad (\neq 0, \neq \infty)$$

för $x \to \infty$. Dessutom gäller att $\int_3^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int_3^\infty {}^1\!/\!x\,\mathrm{d}x$ är divergent, jmf. Sats 13.11(1). Sats 13.12 (kombinerat med Anmärkning 13.5) ger nu att

$$\int_3^\infty \frac{1}{x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_3^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

är divergent.

Alternativ lösning: Då $e^x \geq e^3 > 1$ för $x \geq 3$ gäller $e^{-x} = {}^1\!/\!e^x < 1$. Alltså blir

$$0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+e^{-x}}$$

för $x \geq 3$. Då

$$\int_3^T \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(x+1)\big]_3^T = \ln(T+1) - \ln(4) \to \infty$$

för $T \to \infty$ är generaliserede integralen $\int_3^\infty \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ divergent. Jämförelsessatsen 13.10 ger nu att

$$\int_3^\infty \frac{1}{x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

är divergent.

5. Vi betraktar differentialekvationen

$$y'' - y' - 2y = (12x-1)\cdot e^{-x}. \tag{4}$$

Karakteristiska ekvationen blir $r^2 - r - 2 = 0$ som har rötterna $r_1 = 2$ och $r_2 = -1$. Detta ger enligt Sats 15.2 lösningen

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

till den homogena ekvationen $y'' - y' - 2y = 0$.

För att hitta en partikulärlösning till (4) sätts $y = z \cdot e^{-x}$ varav

$$y' = z' \cdot e^{-x} + z \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (z' - z)\cdot e^{-x}$$

och

$$y'' = (z'' - z')\cdot e^{-x} + (z' - z)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = (z'' - 2z' + z)\cdot e^{-x}.$$

Insättning i (4) ger

$$(z'' - 2z' + z)\cdot e^{-x} - (z' - z)\cdot e^{-x} - 2z\cdot e^{-x} = (12x-1)\cdot e^{-x} \iff z'' - 3z' = 12x - 1.$$

För at hitta en partikulärlösning till denna ekvation gör vi ansatsen $z = x\cdot(Ax + B) = Ax^2 + Bx$ varav $z' = 2Ax + B$ och $z'' = 2A$. Insättning ger

$$2A - 3(2Ax + B) = 12x - 1.$$

Identifiering ger

$$\begin{cases} 2A - 3B &= -1 \\ -6A &= 12 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= -2 \\ B &= -1 \end{cases}$$

dvs $z_p = -2x^2 - x$. Detta ger partikulärlösningen $y_p = (-2x^2 - x)\cdot e^{-x}$ till (4) som alltså har den fuldständiga lösningen

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - (2x^2 + x)\cdot e^{-x}.$$

Derivation ger

$$\begin{aligned} y' &= 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - \big((4x+1)\cdot e^{-x} + (2x^2+x)e^{-x}\cdot(-1)\big) \\ &= 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + (2x^2 - 3x - 1)\cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 1$ ger

$$C_1 + C_2 - 0 = 1 \qquad \text{och} \qquad 2C_1 - C_2 - 1 = 1$$

varav $C_1 = 1$ och $C_2 = 0$. Lösningen blir alltså

$$y(x) = e^{2x} - (2x^2 + x)\cdot e^{-x}.$$

6. Förtjänsten till tiden t dagar blir $400 \cdot e^{-0.05t} \cdot (100 + 0.4t)$ dollar per dag. Den totala inkomsten (i dollar) ges alltså av den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty 400 \cdot e^{-0.05t} \cdot (100 + 0.4t)\,\mathrm{d}t.$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\int_0^T 400 \cdot e^{-0.05t} \cdot (100 + 0.4t)\,\mathrm{d}t &= \left[\begin{array}{c} f(t) = 400 \cdot e^{-0.05t} \Rightarrow \\ F(t) = \frac{400}{-0.05} \cdot e^{-0.05t} = -8000 \cdot e^{-0.05t} \\ g(t) = 100 + 0.4t \Rightarrow g'(t) = 0.4 \end{array}\right] \\
&= \left[-8000 \cdot e^{-0.05t} \cdot (100 + 0.4t)\right]_0^T - \\
&\qquad \int_0^T -8000 \cdot e^{-0.05t} \cdot 0.4\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-8000 \cdot e^{-0.05t} \cdot (100 + 0.4t)\right]_0^T + \\
&\qquad \int_0^T 3200 \cdot e^{-0.05t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-8000 \cdot e^{-0.05t} \cdot (100 + 0.4t)\right]_0^T + \\
&\qquad \left[\frac{3200}{-0.05} \cdot e^{-0.05t}\right]_0^T \\
&= \left[(-8000(100 + 0.4t) - 64000) \cdot e^{-0.05t}\right]_0^T \\
&= \left[-(864000 + 3200t) \cdot e^{-0.05t}\right]_0^T \\
&= 864000 - (864000 + 3200T) \cdot e^{-0.05T}.
\end{aligned}$$

Då

$$\begin{aligned}
864000 - (864000 + 3200T) \cdot e^{-0.05T} &= 864000 - \frac{864000}{e^{0.05T}} - 3200 \cdot \frac{T}{e^{0.05T}} \\
&= 864000 - \frac{864000}{e^{0.05T}} - 3200 \cdot \frac{T}{\left(e^{0.05}\right)^T} \\
&\to 864000 - 0 - 3200 \cdot 0 = 864000
\end{aligned}$$

för $T \to \infty$ enligt Sats 9.13 (jmf. (9.19)), fås alltså

$$\int_0^\infty 400 \cdot e^{-0.05t} \cdot (100 + 0.4t)\,\mathrm{d}t = 864000.$$

Förtjänsten blir alltså 864000 dollar.