Lunds Tekniska Högskola **Lösningar**
Matematik **Analys 2, FMAA50**
Helsingborg **2019-08-19**

1. a)

$$\int e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x = e^{\sin(x)} + C.$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{4x^2}{2x+1}\, \mathrm{d}x &= [\text{polynomdivision}] \\
&= \int_0^1 2x - 1 + \frac{1}{2x+1}\, \mathrm{d}x \\
&= \left[x^2 - x + \frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_0^1 \\
&= \left(1^2 - 1 + \frac{1}{2}\ln(3)\right) - \left(0^2 - 0 + \frac{1}{2}\ln(1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(3).
\end{aligned}$$

c) Trigonometriska ettan och variabelbyta ger

$$\begin{aligned}
\int \sin^5(x)\, \mathrm{d}x &= \int \left(\sin^2(x)\right)^2 \cdot \sin(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int \left(1 - \cos^2(x)\right)^2 \cdot \sin(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \left[\begin{array}{c} t = \cos(x), \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin(x) \\ \Longrightarrow -\mathrm{d}t = \sin(x)\,\mathrm{d}x \end{array}\right] \\
&= \int (1 - t^2)^2 \cdot (-1)\, \mathrm{d}t \\
&= \int -t^4 + 2t^2 - 1\, \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 - t + C \\
&= -\frac{1}{5}\cos(x)^5 + \frac{2}{3}\cos(x)^3 - \cos(x) + C.
\end{aligned}$$

2. a) Differentialekvationen är separabel. Om $y > 0$ och $\cos(x) \neq 0$ gäller

$$\frac{y'}{\cos(x)} = -2\sqrt{y} \iff \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2\sqrt{y} \iff y^{-1/2}\, \mathrm{d}y = -2\cos(x)\, \mathrm{d}x,$$

och integration ger då

$$\int y^{-1/2}\, \mathrm{d}y = \int -2\cos(x)\, \mathrm{d}x \iff 2 \cdot y^{1/2} = -2\sin(x) + C.$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger

$$2\sqrt{1} = -2\sin(0) + C$$

varav $C = 2$. Alltså är $2\sqrt{y} = -2\sin(x) + 2$ vilket ger $\sqrt{y} = 1 - \sin(x)$ dvs

$$y = \big(1 - \sin(x)\big)^2, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

b) Från ekvationen fås $x > 0$. Division med x^2 ger

$$y' + \tfrac{1}{x} \cdot y = 3 \cdot x^{-5/2}. \tag{1}$$

Detta är en linjär differentialekvation av 1:a ordningen som lösas med integrerande faktor. Med $g(x) = \frac{1}{x}$ fås

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C = \ln(x) + C$$

vilket ger $G(x) = \ln(x)$. Integrerande faktorn blir då

$$\mathrm{IF} = e^{G(x)} = e^{\ln(x)} = x.$$

Multiplikation av (1) med IF ger

$$(x \cdot y)' = x \cdot y' + y = 3 \cdot x^{-3/2}.$$

Integration ger

$$x \cdot y = \int 3 \cdot x^{-3/2}\,\mathrm{d}x = -6 \cdot x^{-1/2} + C$$

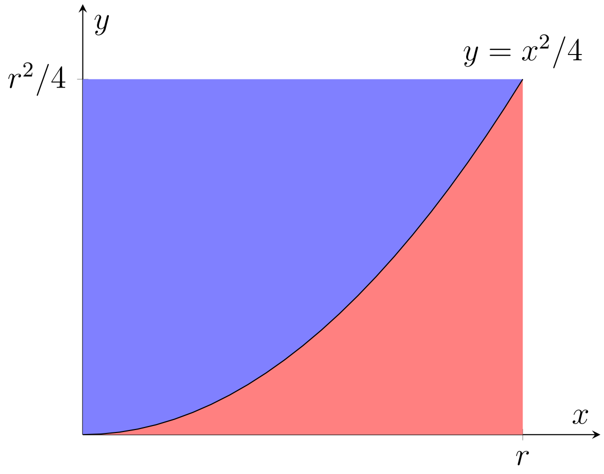
vilket ger lösningen

$$y = -6 \cdot x^{-3/2} + C/x, \qquad x > 0.$$

3. a) Ett masselement ges av $\mathrm{d}m = \rho(x)\,\mathrm{d}x = (2x+1) \cdot e^x\,\mathrm{d}x$. Trådens totala masse ges vid integration

$$\begin{aligned}
m &= \int \mathrm{d}m = \int_0^3 e^x \cdot (2x+1)\,\mathrm{d}x \\
&= \begin{bmatrix} f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x \\ g(x) = 2x+1 \Rightarrow g'(x) = 2 \end{bmatrix} \\
&= \big[e^x \cdot (2x+1)\big]_0^3 - \int_0^3 e^x \cdot 2\,\mathrm{d}x \\
&= \big(7e^3 - 1\big) - [2e^x]_0^3 \\
&= 7e^3 - 1 - \big(2e^3 - 2\big) \\
&= 5e^3 + 1.
\end{aligned}$$

b) Ritas kurven $y = x^2/4$ fås följande graf



Glaset bildas alltså vid rotation kring y-axeln av det *blå* området, dvs det som liggar *över* kurvan. (Vid rotation av det röda området kring y-axeln bildas inte ett glas.) Vid rotation av det blå och det röda området kring y-axeln bildas en cylinder med volym

$$V_{\text{blå}} + V_{\text{röd}} = V_{\text{cylinder}} = \pi r^2 \cdot \frac{r^2}{4} = \frac{\pi}{4} r^4.$$

Rotationsvolymet för det röda området kring y-axeln, dvs området *under* grafen bestämmas vha rörformeln

$$V_{\text{röd}} = \int_0^r 2\pi x \cdot \frac{x^2}{4} \, \mathrm{d}x = \int_0^r \frac{\pi}{2} x^3 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\pi}{8} x^4\right]_0^r = \frac{\pi}{8} r^4.$$

Glasets volym är därför

$$V_{\text{glas}} = V_{\text{blå}} = V_{\text{cylinder}} - V_{\text{röd}} = \frac{\pi}{4} r^4 - \frac{\pi}{8} r^4 = \frac{\pi}{8} r^4.$$

Därför gäller

$$V_{\text{glas}} = 200 \iff \frac{\pi}{8} r^4 = 200 \iff r = \left(\frac{1600}{\pi}\right)^{1/4}.$$

4. a) Enligt standardutvecklingar gäller

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 B_1(x) \qquad \text{och} \qquad \cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 B_2(x)$$

där $B_1(x)$ och $B_2(x)$ är begränsade i en omgivning av 0. Insättning ger

$$\begin{aligned}
\frac{e^x \cdot (1 + x^2) - 1 - x}{1 - \cos(x)} &= \frac{\big(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 B_1(x)\big) \cdot (1 + x^2) - 1 - x}{1 - \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 B_2(x)\big)} \\
&= \frac{1 + x^2 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 B_3(x) - 1 - x}{\tfrac{1}{2}x^2 - x^3 B_2(x)} \\
&= \frac{\tfrac{3}{2}x^2 + x^3 B_3(x)}{\tfrac{1}{2}x^2 - x^3 B_2(x)} \\
&= \frac{\tfrac{3}{2} + x B_3(x)}{\tfrac{1}{2} - x B_2(x)}
\end{aligned}$$

där $B_3(x)$ är begränsad i en omgivning av 0. Därför gäller

$$\frac{e^x \cdot (1+x^2) - 1 - x}{1 - \cos(x)} = \frac{\frac{3}{2} + xB_3(x)}{\frac{1}{2} - xB_2(x)} \longrightarrow \frac{3/2}{1/2} = 3 \text{ för } x \to 0.$$

b) Partialbröksuppdelning ger

$$\frac{1}{x^2+2x} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}.$$

Multiplikation med $x(x+2)$ ger

$$1 = A(x+2) + Bx$$

varav $A = 1/2$ och $B = -1/2$. Integration ger

$$\begin{aligned}
\int_3^T \frac{1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x &= \int_3^T \frac{1/2}{x} - \frac{1/2}{x+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|x| - \ln|x+2|\right]_3^T \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|\right]_3^T \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{T}{T+2}\right) - \ln\left(\frac{3}{5}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{1+2/T}\right) - \ln\left(\frac{3}{5}\right)\right).
\end{aligned}$$

Därför gäller

$$\begin{aligned}
\int_3^T \frac{1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{1+2/T}\right) - \ln\left(\frac{3}{5}\right)\right) \\
&\longrightarrow \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{1+0}\right) - \ln\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right) \text{ för } T \to \infty.
\end{aligned}$$

Generaliserede integralen $\int_3^\infty \frac{1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$ är alltså konvergent med värden $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

5. Vi betraktar differentialekvationen

$$y'' - 2y' + 10y = (10x - 8) \cdot e^{2x}. \tag{2}$$

Karakteristiska ekvationen blir $r^2 - 2r + 10 = 0$ som har rötterna $r_{1,2} = 1 \pm 3i$. Detta ger enligt Sats 15.3 lösningen

$$y_h = e^x \cdot (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x))$$

till den homogena ekvationen $y'' - 2y' + 10y = 0$.

För att hitta en partikulärlösning till (2) sätts $y = z \cdot e^{2x}$ varav

$$y' = z' \cdot e^{2x} + z \cdot e^{2x} \cdot 2 = (z' + 2z) \cdot e^{2x}$$

och

$$y'' = (z'' + 2z') \cdot e^{2x} + (z' + 2z) \cdot e^{2x} \cdot 2 = (z'' + 4z' + 4z) \cdot e^{2x}.$$

Insättning i (2) ger

$$(z''+4z'+4z)\cdot e^{2x} - 2(z'+2z)\cdot e^{2x} + 10z\cdot e^{2x} = (10x-8)\cdot e^{2x} \iff z''+2z'+10z = 10x-8.$$

För at hitta en partikulärlösning till denna ekvation gör vi ansatsen $z = Ax + B$ varav $z' = A$ och $z'' = 0$. Insättning ger

$$0 + 2A + 10(Ax + B) = 10x - 8.$$

Identifiering ger

$$\begin{cases} 2A + 10B &= -8 \\ 10A &= 10 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \end{cases}$$

dvs $z_p = x - 1$. Detta ger partikulärlösningen $y_p = (x - 1) \cdot e^{2x}$ till (2) som alltså har den fuldständiga lösningen

$$y = y_h + y_p = e^x \cdot (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)) + (x - 1) \cdot e^{2x}.$$

Derivation ger

$$\begin{aligned} y' = e^x \cdot (C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)) \\ + e^x \cdot (-C_1 \sin(3x) \cdot 3 + C_2 \cos(3x) \cdot 3) \\ + e^{2x} + (x - 1) \cdot e^{2x} \cdot 2. \end{aligned}$$

Villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 4$ ger

$$C_1 - 1 = 1 \qquad \text{och} \qquad C_1 + 3C_2 + 1 - 2 = 4$$

varav $C_1 = 2$ och $C_2 = 1$. Lösningen blir alltså

$$y(x) = e^x \cdot (2\cos(3x) + \sin(3x)) + (x - 1) \cdot e^{2x}.$$

6. Volymen av bassängen är $50\,\text{m} \times 25\,\text{m} \times 2\,\text{m} = 2.5 \times 10^3\,\text{m}^3 = 2.5 \times 10^6\,\ell$. Låt $y(t)$ beteckna mängden klor (enhet ℓ) vid tiden t (enhet dygn). Enligt uppgiften gäller

$$\begin{aligned} m_{\text{in}} &= 0\,\ell/\text{dygn}, \\ m_{\text{ut}} &= 1000\,\ell/\text{dygn} \cdot \frac{y(t)}{2.5 \times 10^6\,\ell} = 4 \times 10^{-4} \cdot y(t)\ \text{dygn}^{-1}. \end{aligned}$$

Derivaten $y'(t)$ anger ökningen i klorhalten per tidsenhet, dvs vi har $y'(t) = m_{\text{in}} - m_{\text{ut}}$ (enhet ℓ/dygn) vilket ger

$$y'(t) = 0 - 4 \times 10^{-4} \cdot y(t).$$

Från början dvs vid tiden $t = 0$ gäller $y(0) = 10\,\ell$. Den matematiska modellen blir alltså

$$y'(t) = -4 \times 10^{-4} \cdot y(t), \qquad y(0) = 10.$$

Vi får alltså $y' + 4 \times 10^{-4} \cdot y = 0$. Detta är en linjär första ordens differentialekvation som lösas med integrerande faktor (den går också att lösa som separabel differentialekvation). Vi får $g(t) = 4\times 10^{-4}$, $G(t) = 4\times 10^{-4} \cdot t$ och $\mathrm{IF} = e^{4\times 10^{-4}\cdot t}$. Multiplikation med IF ger

$$y' \cdot e^{4\times 10^{-4}\cdot t} + 4 \times 10^{-4} \cdot y \cdot e^{4\times 10^{-4}\cdot t} = 0 \iff \left(y \cdot e^{4\times 10^{-4}\cdot t}\right)' = 0.$$

Integration ger

$$y \cdot e^{4\times 10^{-4}\cdot t} = C \iff y(t) = C \cdot e^{-4\times 10^{-4}\cdot t}.$$

Villkoret $y(0) = 10$ ger då $10 = C \cdot e^0$, dvs $C = 10$. Vi söker nu t_1 så att $y(t_1) = 2 \times 10^{-4}\,\% \times 2.5 \times 10^6\,\ell = 5\,\ell$:

$$\begin{aligned} y(t_1) = 5 \iff 10 \cdot e^{-4\times 10^{-4}\cdot t_1} &= 5 \\ \iff e^{-4\times 10^{-4}\cdot t_1} &= \frac{5}{10} \\ \iff t_1 = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-4 \times 10^{-4}} &= \frac{\ln(2)}{4 \times 10^{-4}} = 2500\ln(2). \end{aligned}$$

Det dröjar alltså $2500\ln(2) \cong 1733$ dygn, dvs 4.74 år tills klorhalten igen är under det hygieniska gränsvärdet.