Lunds Tekniska Högskola
Matematik
Helsingborg

Lösningar
Analys 2, FMAA50
2019-04-29

PRELIMINÄR VERSION!

1. a)

$$\int \frac{x^5+3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^3 + 3x^{-2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 - 3x^{-1} + C.$$

b)

$$\begin{aligned}\int x\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \begin{bmatrix} f(x)=\sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x) \\ g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1\end{bmatrix} \\ &= -\cos(x)\cdot x - \int(-\cos(x))\cdot 1\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cdot\cos(x) + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -x\cdot\cos(x) + \sin(x) + C.\end{aligned}$$

c) Partialbråksuppdelning ger ansatsen

$$\frac{5x+13}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

Multiplikation med $(x+2)(x+3)$ på båda sidor ger

$$5x+13 = A(x+3) + B(x+2). \tag{1}$$

Vi beräknar nu A och B genom att sätta in lämpliga x (nämnarens nollställen) i (1). Nollstället $x=-2$ ger

$$3 = A + 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = 3.$$

och nollstället $x=-3$ ger

$$-2 = 0 - B \qquad \Longleftrightarrow \qquad B = 2.$$

Vi får då

$$\frac{5x+13}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x+3}$$

Integration ger nu:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{5x+13}{(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x+3}\,\mathrm{d}x \\ &= \big[3\ln|x+2| + 2\ln|x+3|\big]_0^1 \\ &= \big(3\ln(3) + 2\ln(4)\big) - \big(3\ln(2) + 2\ln(3)\big) \\ &= 3\ln(3) + 4\ln(2) - 3\ln(2) - 2\ln(3) \\ &= \ln(2) + \ln(3) \\ &= \ln(6).\end{aligned}$$

2. a) Enligt standardutvecklingar gäller

$$\sin(x) = x - \tfrac{1}{6}x^3 + x^4 B_1(x), \quad \arctan(x) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + x^4 B_2(x) \text{ och } \cos(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + x^3 B_3(x)$$

där $B_1(x)$, $B_2(x)$ och $B_3(x)$ är begränsade i en omgivning av 0. Därför gäller (med $B_4(x)$ begränsad i en omgivning av 0)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \arctan(x)}{x(1-\cos(x))} &= \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + x^4 B_1(x) - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + x^4 B_2(x)\right)}{x \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 B_3(x)\right)\right)} \\
&= \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + x^4 B_1(x) - x + \frac{1}{3}x^3 - x^4 B_2(x)}{x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - x^3 B_3(x)\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{6}x^3 + x^4 B_4(x)}{\frac{1}{2}x^3 - x^4 B_3(x)} \\
&= \frac{\frac{1}{6} + x B_4(x)}{\frac{1}{2} - x B_3(x)} \\
&\to \frac{\frac{1}{6} + 0}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{1}{3} \qquad \text{för } x \to 0.
\end{aligned}$$

b) Enligt definitionen ges Maclaurinpolynomet av ordning 5 till $f(x)$ av

$$p_5(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\cdot x^5. \quad (2)$$

Å andra sidan vet vi att

$$p_5(x) = 1 + 0\cdot x - \tfrac{1}{4}\cdot x^2 - \tfrac{1}{4}\cdot x^3 - \tfrac{5}{32}\cdot x^4 - \tfrac{1}{12}\cdot x^5. \quad (3)$$

Jämförelse av koefficienterna til x i (2) och (3) ger då

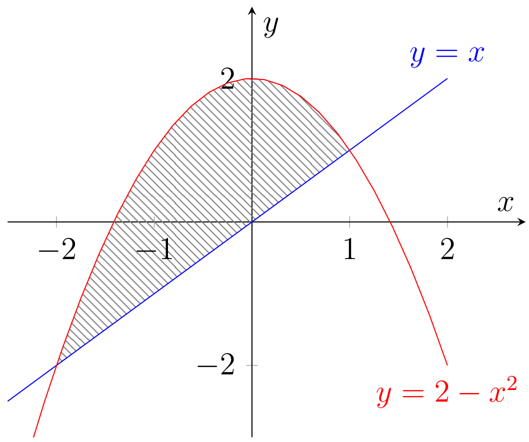
$$f'(0) = 0.$$

På samma sätt ger jämförelse av koefficienterna til x^5 i (2) och (3) att

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = -\tfrac{1}{12} \implies f^{(5)}(0) = -\tfrac{1}{12}\cdot 5! = -\tfrac{1}{12}\cdot 120 = -10.$$

Alltså är $f'(0) = 0$ och $f^{(5)}(0) = -10$.

3. a) Ritas kurvorna fås följande figur där det skuggade område är det som innesluts av kurvorna.



Skärningen mellan kurvorna blir

$$\begin{aligned}
x = 2 - x^2 &\iff x^2 + x - 2 = 0 \\
&\iff x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - (-2)} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} \\
&\iff x = -2 \text{ eller } x = 1.
\end{aligned}$$

Arean av det skuggade området blir då

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{1} (2 - x^2) - x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{1} 2 - x^2 - x \,\mathrm{d}x \\
&= \left[2x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{1} \\
&= \left(2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right) - \left(2 \cdot (-2) - \tfrac{1}{3} \cdot (-8) - \tfrac{1}{2} \cdot 4\right) \\
&= \tfrac{7}{6} - \left(-\tfrac{10}{3}\right) = \tfrac{27}{6} = \tfrac{9}{2}.
\end{aligned}$$

b) Division med $x^2 + 1$ ger

$$y' + \frac{2x}{x^2+1} \cdot y = \frac{x}{x^2+1}. \tag{4}$$

Detta är en linjär differentialekvation av 1:a ordningen. Med $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ fås

$$\int \frac{2x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x = \ln|x^2+1| + C = \ln(x^2+1) + C$$

vilket ger $G(x) = \ln(x^2 + 1)$. Integrerande faktorn blir då

$$\mathrm{IF} = e^{G(x)} = e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1.$$

Multiplikation av (4) med IF ger

$$\big((x^2+1) \cdot y\big)' = (x^2+1) \cdot y' + 2x \cdot y = x.$$

Integration ger

$$(x^2+1) \cdot y = \int x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}x^2 + C$$

varav

$$y = \frac{\frac{1}{2}x^2 + C}{x^2+1}.$$

Villkoret $y(0) = 3$ ger

$$\frac{0 + C}{0 + 1} = 3$$

varav $C = 3$. Lösningen är alltså

$$y = \frac{\frac{1}{2}x^2 + 3}{x^2+1} = \tfrac{1}{2} + \frac{5/2}{x^2+1}.$$

4. Vi betraktar differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 5y = 8\sin(x). \tag{5}$$

Karakteristiska ekvationen blir $r^2 - 4r + 5 = 0$ som har rötterna $r_{1,2} = 2 \pm i$. Detta ger enligt Sats 15.3 lösningen

$$y_h = e^{2x} \cdot (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$$

till den homogena ekvationen $y'' - 4y' + 5y = 0$. För att hitta en partikulärlösning till (5) betraktas hjälpekvationen (observera att $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})$)

$$u'' - 4u' + 5u = e^{ix}. \tag{6}$$

Ansatsen $u = z \cdot e^{ix}$ ger

$$\begin{aligned} u' &= z' \cdot e^{ix} + z \cdot e^{ix} \cdot i \\ &= e^{ix} \cdot (z' + iz), \\ u'' &= e^{ix} \cdot i \cdot (z' + iz) + e^{ix} \cdot (z'' + iz') \\ &= e^{ix} \cdot (z'' + 2iz' - z). \end{aligned}$$

Insättning i (6) ger

$$\begin{gathered} e^{ix} \cdot (z'' + 2iz' - z) - 4e^{ix} \cdot (z' + iz) + 5z \cdot e^{ix} = e^{ix} \iff \\ (z'' + 2iz' - z) - 4(z' + iz) + 5z = 1 \iff \\ z'' + 2iz' - z - 4z' - 4iz + 5z = 1 \iff \\ z'' + (-4 + 2i)z' + (4 - 4i)z = 1. \end{gathered}$$

Med ansatsen $z_p = A$ fås $z_p' = 0$ och $z_p'' = 0$ vilket ger

$$0 + (-4 + 2i) \cdot 0 + (4 - 4i) \cdot A = 1$$

varav $A = \frac{1}{4-4i} = \frac{1+i}{4(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{8}$. Alltså är $z_p = \frac{1+i}{8}$. En partikulärlösning till (6) ges därför av

$$\begin{aligned} u_p = z_p \cdot e^{ix} &= \frac{1+i}{8} \cdot \big(\cos(x) + i\sin(x)\big) = \frac{1}{8} \cdot (1+i)\big(\cos(x) + i\sin(x)\big) \\ &= \frac{1}{8}\Big(\big(\cos(x) - \sin(x)\big) + i\big(\cos(x) + \sin(x)\big)\Big). \end{aligned}$$

Då differentialekvationen (5) har reella koefficienter blir dess partikulärlösning

$$y_p = 8 \cdot \mathrm{Im}(u_p) = 8 \cdot \frac{1}{8}\big(\cos(x) + \sin(x)\big) = \cos(x) + \sin(x).$$

Den allmänna lösningen till (5) är därför

$$y = y_h + y_p = e^{2x} \cdot (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + \cos(x) + \sin(x).$$

Derivation ger

$$\begin{aligned}
y' &= e^{2x} \cdot 2 \cdot \big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\big) + e^{2x} \cdot \big(C_1(-\sin(x)) + C_2 \cos(x)\big) \\
&\quad + (-\sin(x)) + \cos(x) \\
&= e^{2x} \cdot \big((2C_1 + C_2)\cos(x) + (-C_1 + 2C_2)\sin(x)\big) - \sin(x) + \cos(x).
\end{aligned}$$

Villkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 2$ ger

$$C_1 + 1 = 1 \qquad \text{och} \qquad 2C_1 + C_2 + 1 = 2$$

varav $C_1 = 0$ och $C_2 = 1$. Lösningen blir alltså

$$y = e^{2x} \cdot \sin(x) + \cos(x) + \sin(x).$$

5. • Generaliserede integralen $\int_e^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
\int_e^T \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\begin{array}{c} t = \ln(x) \Rightarrow x = e^t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t \Rightarrow \mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t \\ x = e \Rightarrow t = 1 \\ x = T \Rightarrow t = \ln(T) \end{array}\right] \\
&= \int_1^{\ln(T)} \frac{1}{e^t \cdot t^2} e^t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\ln(T)} t^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \big[-t^{-1}\big]_1^{\ln(T)} \\
&= -\frac{1}{\ln(T)} - \left(-\frac{1}{1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{\ln(T)} \\
&\to 1 - 0 = 1 \qquad \text{för } T \to \infty.
\end{aligned}$$

Generaliserede integralen $\int_e^\infty \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$ är alltså konvergent med värden 1.

• Generaliserede integralen $\int_e^\infty \frac{1}{x - \ln(x)}\,\mathrm{d}x$: Sätt $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = \frac{1}{x - \ln(x)}$. Då

$$0 < \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} < \underbrace{\frac{1}{x - \ln(x)}}_{g(x)}$$

för $x \geq e$ och $\int_e^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_e^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ är divergent (enligt Sats 13.11(1) och Anmärkning 13.5) blir också $\int_e^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int_e^\infty \frac{1}{x - \ln(x)}\,\mathrm{d}x$ divergent enligt Sats 13.10(2). Generaliserede integralen $\int_e^\infty \frac{1}{x - \ln(x)}\,\mathrm{d}x$ är alltså divergent.

6. Enligt Analysens Huvudsats (Sats 14.2) är $F(x)$ deriverbar för $x > -1$ med

$$F'(x) = \frac{1-x}{(x^2+1)(x+1)}$$

Speciellt är F kontinuerlig och det finns alltså (enligt Sats 9.9) ett största och minsta värde på intervallet $[0, 2]$. Enligt Sats 10.6 antas dessa värden antigen i ändpunkten 0 och 2 eller i ett inre stationärt punkt. Då

$$F'(x) = 0 \iff \frac{1-x}{(x^2+1)(x+1)} = 0 \iff x = 1$$

finns bara ett stationärt punkt: $x = 1$. Teckentabellen blir

x	0		1		2
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	

På intervallet $[0, 2]$ har $F(x)$ alltså minsta värdet i 0 eller 2 och största värdet i 1. Vi behöver alltså beräkna värden $F(0) = 0$, $F(1)$ och $F(2)$. Partialbråksuppdelning ger ansatsen

$$\frac{1-t}{(t^2+1)(t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1}$$

Multiplikation med $(t+1)(t^2+1)$ på båda sidor ger

$$1 - t = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+1).$$

Insättning av $t = -1$ ger

$$2 = 2A + 0 \iff A = 1.$$

Insättning av $t = 0$ ger

$$1 = 1 + C \iff C = 0.$$

Insättning av $t = 1$ ger

$$0 = 2 + 2(B+0) \iff B = -1.$$

Vi får alltså

$$\frac{1-t}{(t^2+1)(t+1)} = \frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1}.$$

Integration ger då (för $x > -1$):

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \frac{1-t}{(t^2+1)(t+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{1}{t+1} - \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[\ln|t+1| - \tfrac{1}{2}\ln|t^2+1|\Big]_0^x \\
&= \big(\ln|x+1| - \tfrac{1}{2}\ln|x^2+1|\big) - \big(\ln|0+1| - \tfrac{1}{2}\ln|0^2+1|\big) \\
&= \ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \big(0 - \tfrac{1}{2}\cdot 0\big) \\
&= \ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1).
\end{aligned}$$

Största värde på intervallet $[0, 2]$ blir alltså

$$F(1) = \ln(2) - \tfrac{1}{2}\ln(2) = \tfrac{1}{2}\ln(2).$$

Då

$$F(2) = \ln(3) - \tfrac{1}{2}\ln(5) = \ln(3) - \ln(\sqrt{5}) = \ln({}^{3}\!/\!{\scriptstyle\sqrt{5}})$$

gäller

$$F(2) = \ln({}^{3}\!/\!{\scriptstyle\sqrt{5}}) > \ln(1) = 0 = F(0).$$

Minsta värde på intervallet $[0, 2]$ blir alltså $F(0) = 0$.