LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **ANALYS 1**
Helsingborg **2018-04-13**

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\cos x}=\dfrac{0}{1}=0$,

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3^x}{2^x+x^4-3^x+\pi}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{3^x}-\dfrac{2x}{3^x}+1}{\dfrac{2^x}{3^x}+\dfrac{x^4}{3^x}-1+\dfrac{\pi}{3^x}}=\dfrac{0-0+1}{0+0-1+0}=-1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+2t)}{\ln(1+3t)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln(1+2t)}{2t}\cdot\dfrac{3t}{\ln(1+3t)}\cdot\dfrac{2}{3}\right)=1\cdot1\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2-4x+1-x(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-4}=0$.

2. a) $\left|\dfrac{(-2+2i)(1-i)}{4i\left(\sqrt{3}+i\right)}\right|=\dfrac{|-2+2i|\cdot|(1-i)|}{|4i|\cdot\sqrt{3}+i}=\dfrac{\sqrt{(-2)^2+2^2}\cdot\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)}{4\cdot\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$.

$\arg(-2+2i)+\arg(1-i)-\arg(4i)-\arg(\sqrt{3}+i)=\dfrac{3\pi}{4}+\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{12}$.

b) Eftersom $2i$ och $1+i$ är rötter till ett 4:e gradspolynom med reella koefficienter så är även deras konjugater $-2i$ och $1-i$ rötter till ekvationen.

Polynomet blir då:

$$\left(z-2i\right)\cdot\left(z-(-2i)\right)\left(z-(1+i)\right)\left(z-(1-i)\right)=\left(z^2-(2i)^2\right)\left((z-1)-i\right)\left((z-1)+i\right)=$$
$$=\left(z^2+4\right)\cdot\left((z-1)^2+1\right)=\left(z^2+4\right)\cdot\left(z^2-2z+2\right)=z^4-2z^3+6z^2-8z+8.$$

Svar: $z^4-2z^3+6z^2-8z+8$.

3. a) $\left(f'(x)\right)^2 - \dfrac{8}{f'(x)} = 0$, $f(x) = x\ln x - x$.

$f'(x) = 1\cdot\ln x + 1 - 1 = \ln x.$

Sätt in i ekv. $\left(\ln x\right)^2 - \dfrac{8}{\ln x} = 0$. Med $t = \ln x$ får vi

$t^2 - \dfrac{8}{t} = 0 \Leftrightarrow t^3 = 8 \Leftrightarrow t = 2$ som ger $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

Svar: $x = e^2$.

b) Normalen till $f(x) = 2x + \arctan 2x$ i punkten $\dfrac{1}{2}$.

Vi får $x_0 = \dfrac{1}{2}$, $y_0 = f(\dfrac{1}{2}) = 1 + \dfrac{\pi}{4}$, $f'(x) = 2 + \dfrac{2}{1+4x^2}$ och $f'(\dfrac{1}{2}) = 3$.

Normalens ekvation: $y - \left(1 + \dfrac{\pi}{4}\right) = 3(x - \dfrac{1}{2}) \Leftrightarrow y = 3x - \dfrac{\pi+2}{4}$.

4. a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{8} 3^{-k} = \sum_{k=2}^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3^7}\right) = \frac{1093}{6561}$.

b) $\displaystyle (2-x)^{12} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\cdot 2^{12-k}\cdot(-x)^k$.

Eftersom man intresserad av koeff. för x^5 ser man att $k = 5$.

Koefficienten blir $-\dbinom{12}{5}\cdot 2^7 = -12\cdot 33\cdot 2^8 = -101376.$

c) $f(x) = \sqrt{5x+1}$ har D_f : $0 \le x \le 3$, V_f : $1 \le y \le 4$.

Lös ut x : $y = \sqrt{5x+1} \Leftrightarrow y^2 = 5x+1 \Leftrightarrow 5x = y^2 - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2-1}{5}$.

D.v.s. $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-1}{5}$ med $D_{f^{-1}}$: $1 \le x \le 4.$

5. $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$, $D_f = \left\{x \in R : x \ne \pm\sqrt{3}\right\}$.

1) Vi undersöker diskontinuitets punkter: $x = \sqrt{3}$ och $x = -\sqrt{3}$.

$\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}^-}\frac{x^3}{3-x^2} = \infty$, dvs $x = \sqrt{3}$ är en lodrät asymptot.

$\displaystyle\lim_{x\to-\sqrt{3}^+}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\sqrt{3}^-}\frac{x^3}{3-x^2} = \infty$, dvs $x = -\sqrt{3}$ är en lodrät asymptot.

2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3-x^2} = \infty$, dv s inga vågräta asymptoter.

3) Sneda asymptoter $y = kx + m, \quad x \to \pm\infty$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(3-x^2)x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3-x^2} = -1.$$

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{3-x^2} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{3-x^2} = 0.$$

Vi får samma värden på k och m då $x \to -\infty$.

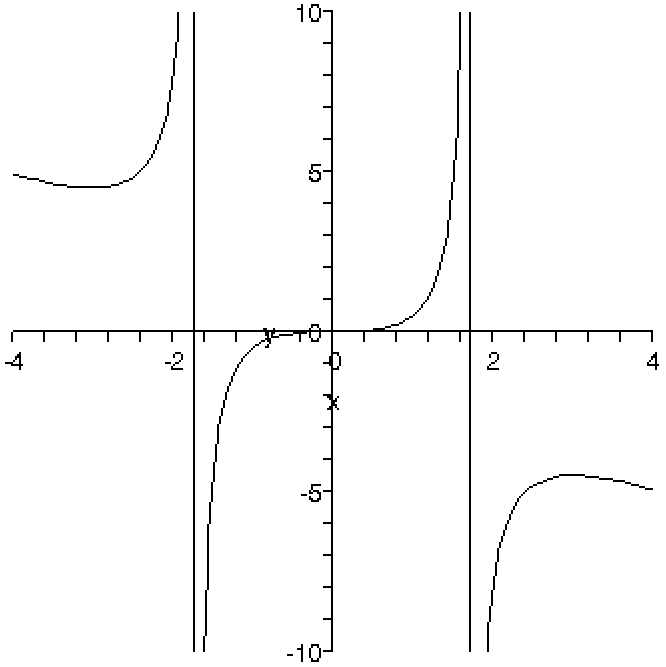
D v s $y = -x, \quad x \to \pm\infty$ är en sned asymptot.

4) $$y' = \frac{3x^2(3-x^2) - x^3(-2x)}{\left(3-x^2\right)^2} = \frac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2}$$

Stationära punkter: $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2(3-x)(3+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = \pm 3$.

Teckenschema:

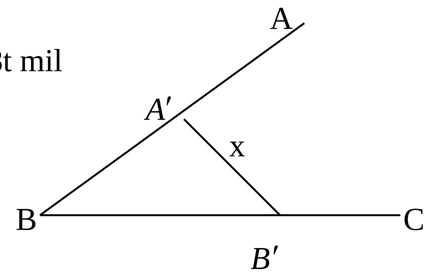
x		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3	
$f'(x)$	-	0	+		+	0	+		+	0	-
$f(x)$	↘	lok.min 4,5	↗	Ej def.	↗	Terrass 0	↗	Ej def.	↗	Lok.max -4,5	↘



6. x (t) = avståndet mellan bilen och tåget vid tiden t.

$|AB|$ = 200 km, $A'B$ = 200-80t = 10(20-8t) = 20-8t mil

BB' = 50t km = 5t mil,



Vi får ekvationen $x^2 = (A'B)^2 + (BB')^2 - 2A'B \cdot BB' \cdot \cos 60^o \Leftrightarrow$

$$x^2 = (20-8t)^2 + (5t)^2 - 2(20-8t)5t\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = 129t^2 - 420t + 400 \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt{129t^2 - 420t + 400} \Rightarrow x'(t) = \frac{129t - 210}{\sqrt{129t^2 - 420t + 400}}$$

$$x'(t) = 0: \quad 129t - 210 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{70}{43}$$

t		70/43	
$x'(t)$	-		+
$x(t)$	↘	min	↗

Avståndet är minst då $t = \frac{70}{43}$.

Svar: $t = \frac{70}{43} \approx 1.6h$