LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **ANALYS 1**
Helsingborg **2020-01-18**

1. a) $\lim_{x\to 0}\frac{5^x+3}{x^3-1}=\frac{5^0+3}{0-1}=-4$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x+3}{x^3-1}=\left(typ\,\frac{\infty}{\infty}\right)=\infty$

c) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=0$

d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2+1}-1}{\frac{3}{4}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{16}\cdot\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-1}{-\frac{1}{4}}=\frac{9}{16}\cdot\frac{0-1}{-\frac{1}{4}}=\frac{9}{4}.$

2. a) $D\left((1+(2x+7)^4)^3\right)=24(1+(2x+7)^4)^2(2x+7)^3.$

b) $D\left(\frac{1}{(2-x)^3}\right)=\frac{3}{(2-x)^4}.$ c) $D(\sqrt{x}\cdot\tan 2x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\tan 2x+\sqrt{x}\,\frac{2}{\cos^2 2x}.$

d) $D\ln\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)=D\left(\ln\cos x-\ln x^2\right)=D\left(\ln\cos x-2\ln|x|\right)=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)-2\frac{1}{x}$

$=\frac{-\sin x}{\cos x}-\frac{2}{x}=-\tan x-\frac{2}{x}$

3. a) $\frac{(1+i\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-i)}{2i-2}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}{2(-1+i)}=\frac{2\,e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}=$

$=\frac{4\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}}=\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{7\pi}{12}}.$

b) Kvadratkomplettering ger

$(z-(1+\frac{i}{2}))^2-(1+\frac{i}{2})^2-\frac{9}{4}+5i=0\ \Leftrightarrow\ (z-(1+\frac{i}{2}))^2=3-4i.$

Med $z-(1+\frac{i}{2})=a+ib$ får vi

$(a+ib)^2=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow a^2+i\,2ab-b^2=3-4i.$ Jämförelse ger

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 & (1) \\ 2ab = -4 & (2) \\ a^2 + b^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

där ekv. (3) fås av $|a+ib|^2 = |3-4i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5.$

(1)+(3) ger $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a = \pm 2$.
(2) ger : Då $a = 2$ så $2 \cdot 2b = -4 \Leftrightarrow b = -1.$
Då $a = -2$ $2 \cdot (-2)b = -4 \Leftrightarrow b = 1.$

Vi får $z - \left(1 + \frac{i}{2}\right) = a + ib = \begin{cases} 2 - i \\ -2 + i \end{cases} \Leftrightarrow z = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}i \\ -1 + \frac{3}{2}i \end{cases}$ som ger svaret.

Svar: $z = 3 - \frac{1}{2}i\,, -1 + \frac{3}{2}i.$

4. a) $\left(3 - 2x\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \cdot 3^{8-k} \cdot \left(-2x\right)^k .$

Eftersom man är intresserad av koeff. för x^5 ser man att $k = 5.$

Vi får $\binom{8}{5} \cdot 3^3 \cdot (-2x)^5 = \binom{8}{3} \cdot 27 \cdot (-32)x^5 = -\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 27 \cdot 32\, x^5 = -189 \cdot 256\, x^5.$

Svar : $-56 \cdot 27 \cdot 32 = -189 \cdot 256 = -48384$

b) Använd hjälpvinkelmetoden

$-\sin 3x + \cos 3x = A\sin(3x + \delta) = A\cos\delta \cdot \sin 3x + A\sin\delta \cdot \cos 3x$.

Jämförelse ger $\begin{cases} A\sin\delta = 1 \\ A\cos\delta = -1 \end{cases}$. För att bestämma amplituden A kvadrera och

addera ekvationerna. Det blir $A^2 = 2 \Rightarrow A = \sqrt{2}$ (ty $A > 0$).

ALT: $A = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, se s. 156 i boken.

Ekvationssystemet

$\begin{cases} \sqrt{2}\sin\delta = 1 \\ \sqrt{2}\cos\delta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\delta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ ger fasförskjutningen $\delta = \frac{3\pi}{4}$.

Funktionen kan skrivas $f(x) = -\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right).$

5. a) $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$, $x \in [0,1]$. Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig på en kompakt mängd finns både största och minsta värde.

$$f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Då $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ligger utanför $0 \le x \le 1$ finns största och minsta värde bland

värdena $x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$ eller 1.

Då $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ och $f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ får vi att

Svar: Största värdet är $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ och minsta värdet är $f(0) = 0$.

b) Tangentens ekvation är $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, där $x_0 = \frac{1}{3}$ och

$$y_0 = 2 \cdot \arctan\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \arg\tan 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$f'(x) = \frac{6}{1+9x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(\frac{1}{3}) = 3.$ Insättning i tangentens ekvation

ger $y - \frac{\pi}{2} = 3 \cdot (x - \frac{1}{3}) \Leftrightarrow y = 3x + \frac{\pi}{2} - 1.$

6. $y = f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2}$, $D_f = \{x \in R : x \neq 0\}$.

1) $f(x)$ är ej definierad i $x = 0$. Eftersom $\lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2} = -\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2} = -\infty$ så

är $x = 0$ en lodrät asymptot.

2) Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2} = 2 \text{ och } \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2} = 2$$

D.v.s. $y = 2$ är en vågrät asymptot då $x \to \pm\infty$.

Alt.: Polynomdivision ger $\frac{2x^2 - x - 1}{x^2} = 2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

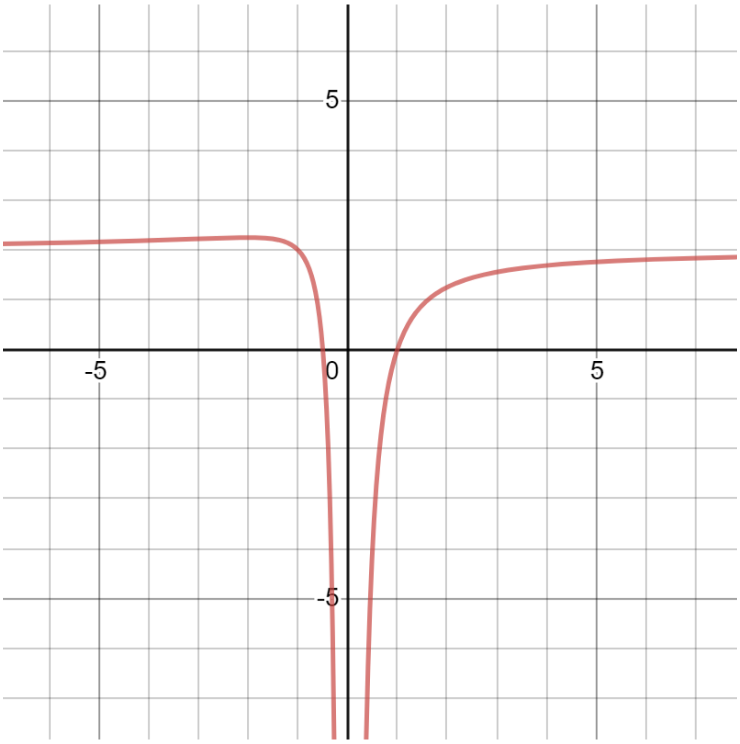
Då $\frac{1}{x^2} \to 0$ och $\frac{1}{x} \to 0$, $x \to \pm\infty$ är $y = 2$ en vågrät asymptot då $x \to \pm\infty$.

3) $y' = \dfrac{(4x-1)\cdot x^2 - (2x^2 - x - 1)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x^2+2x}{x^4} = \dfrac{x+2}{x^3}$.

Stationära punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$. Teckenschemat blir:

x		-2		0	
x+2	–	0	+		+
$1/x^3$	–		-	Ej def	+
$f'(x)$	+		–	Ej def	+
$f(x)$	↗	9/4	↘	Ej def	↗

Lokal maximipunkt i $x=-2$. Minsta värde saknas. Största värde: $f(-2) = \dfrac{9}{4}$.



Kurvan skär sin ena asymptot ($y=2$) i punkten A.

Detta ger $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2} = 2 \Leftrightarrow x = -1$ som ger A $= (-1, 2)$.

Kurvan skär även positiva x-axeln i punkten B.

Vi får: $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1, -\dfrac{1}{2}$.

Då $x > 0$ är $x = 1$ som ger B $= (1, 0)$.

Ekvationen för linjen som går genom A och B blir: $y - 0 = \dfrac{2-0}{-1-1}(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 1$.