LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **ANALYS 1**
Helsingborg **2019-04-24**

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\arctan x}{x} = \left(\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\infty}\right) = 0$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{5x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{5}\cdot 1 = \dfrac{1}{5}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{n} = \left(1^{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\ln(2x+1)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\cdot 2x}{2\cdot\ln(2x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2x}{\ln(2x+1)} = \dfrac{3}{2}\cdot 1 = \dfrac{3}{2}$.

2. *a)* $D\ln\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1} = D\left(\ln e^{2x} - \ln\left(e^{2x}+1\right)\right) = D\left(2x - \ln\left(e^{2x}+1\right)\right) =$

$= 2 - \dfrac{1}{e^{2x}+1}\cdot e^{2x}\cdot 2 = 2\cdot\dfrac{e^{2x}+1-e^{2x}}{e^{2x}+1} = \dfrac{2}{e^{2x}+1}$.

b) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\left(4+\arctan 3x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{1+(3x)^2}\cdot 3 = \dfrac{9}{2}\left(4+\arctan 3x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{1+9x^2} \Rightarrow f'(0) = 9$.

c) Tangentens ekvation är $y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, där $x_0 = 3$ och $y_0 = 3^2\cdot\cos(3-3) = 9$
$f'(x) = 2x\cdot\cos(x-3) - x^2\cdot\sin(x-3) \quad\Rightarrow\quad f'(3) = 6$.
Insättning i tangentens ekvation ger $y - 9 = 6\cdot(x-3) \Leftrightarrow y = 6x - 9$.

3. a) $(2-x)^5 = \sum\limits_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cdot 2^{5-k}\cdot(-x)^k = \binom{5}{0}\cdot 2^5\cdot(-x)^0 + \binom{5}{1}\cdot 2^4\cdot(-x)^1 + \binom{5}{2}\cdot 2^3\cdot(-x)^2 +$

$+\binom{5}{3}\cdot 2^2\cdot(-x)^3 + \binom{5}{4}\cdot 2^1\cdot(-x)^4 + \binom{5}{5}\cdot 2^0\cdot(-x)^5 = 1\cdot 32 - 5\cdot 16x + 10\cdot 8x^2 - 10\cdot 4x^3 +$

$+5\cdot 2x^4 - 1\cdot x^5 = -x^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32$

b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{256}+\ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\frac{1}{4}-1} = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{0-1}{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$.

c) $f(x)$ är kontinuerlig $\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$.

$\lim_{x\to 2^-}(x^2-2)=2$ och $\lim_{x\to 2^+}(kx+8)=2k+8$ som ger $2k+8=2 \Leftrightarrow k=-3$.

Funktionen blir $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & x<2 \\ -3x+8, & x\geq 2 \end{cases}$

4. a) $z^2+16+30i=0 \Leftrightarrow z^2=-16-30i$

Sätt $z=a+ib$. Man får då

$$\begin{cases} a^2-b^2=-16 & (1) \\ 2ab=-30 & (2) \\ a^2+b^2=34 & (3) \end{cases}$$

(1)+(2) ger $2a^2=18 \Leftrightarrow a=\pm 3$. Insättning i (2) ger $a=3, b=-5$ och $a=-3, b=5$.

Svar: $3-5i, -3+5i$

b) Eftersom $z^3-9z^2+19z-35=0$ har reella koefficienter, så är också $z=1-2i$ en rot.

Polynomdivisionen av $z^3-9z^2+19z-35$ med

$(z-(1+2i))(z-(1-2i))=z^2-2z+5$ ger $z-7$.

D.v.s. ekvationen har lösningar $1+2i, 1-2i, 7$.

Alt. lösning: Gissa en rot, testa $\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35$. Man får att $z=7$ är en rot.
Polynomdivisionen med $z-7$ ger kvoten z^2-2z+5. Genom att lösa ekvationen $z^2-2z+5=0$ får man två rötter till $z=1+2i$ (redan känd) och $z=1-2i$.

Svar: $1+2i, 1-2i, 7$.

5. $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$, $D_f=\{x\in R : x\neq 1\}$.

1) Lodrät asymptoten kan finnas i $x=1$.

$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=\infty$, $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=\infty$, dvs $x=1$ är en lodrät asymptot.

2) Vågräta asymptoter: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=1$, $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2=1$ d.v.s. $y=1$ är en vågrät asymptot då $x\to\pm\infty$.

3) $y'=2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot\frac{1-x-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{4(x+1)}{(1-x)^3}$.

Stationära punkter: $f'(x)=0 \Rightarrow 4(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Teckenschema:

x		-1		1	
$f'(x)$	-	0	+	Ej def.	-
$f(x)$	↘	lok.min 0	↗	Ej def.	↘

4) Skärningspunkter med y-axeln: $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

Med x-axeln: $y = 0$ ger $0 = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \Leftrightarrow x = -1$ (lokalt minimum)

Största värdet saknas, minsta värdet $f(-1) = 0$.

6. Omkretsen är 60 cm, d.v.s. $2r + 2x + \pi \cdot r = 60 \Leftrightarrow x = 30 - r\frac{\pi+2}{2}$.

Områdets arean som funktion av r blir

$$A(r) = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 + 2rx = \frac{1}{2}\pi \cdot r^2 + 2r\left(30 - r\frac{\pi+2}{2}\right) = \ldots = 60r - r^2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$A'(r) = 60 - (4+\pi)r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{60}{4+\pi}.$$

r		$\frac{60}{4+\pi}$	
$A'(r)$	+	0	-
$A(r)$	↗	Lokalt max	↘

$$\Rightarrow x = 30 - \frac{60}{4+\pi} \cdot \frac{\pi+2}{2} = \ldots = \frac{60}{4+\pi}.$$

Svar: Arean är maximal om $x = r = \frac{60}{4+\pi}$.