LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **ANALYS 1**
Helsingborg **2019-01-12**

1. a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{2x}=0$, ty sinx är begränsad och $2x\to\infty$.

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{\arctan x}=\frac{5}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{10}{\pi}.$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+3^x}{1-3^x+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{3^x}-\frac{3x}{3^x}+1}{\frac{1}{3^x}-1+\frac{x^3}{3^x}}=\frac{0-0+1}{0-1+0}=-1.$

e) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+3^x}{1-3^x+x^3}=\frac{1-3+3}{1-3+1}=-1.$

2. a) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}=2^{12}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)^{12}=2^{12}\cdot\left(e^{-\frac{\pi}{6}i}\right)^{12}=2^{12}\cdot e^{-\frac{12\pi}{6}i}=2^{12}\cdot e^{-2\pi i}=2^{12}\cdot 1=2^{12}.$

b) Kvadratkomplettering ger

$(z+3i)^2-(3i)^2-1-6i=0 \iff (z+3i)^2=-8+6i.$

Med $z+3i=a+ib$ får vi

$(a+ib)^2=-8+6i \iff a^2+i\,2ab-b^2=-8+6i.$

Jämförelse ger

$$\begin{cases} a^2-b^2=-8 & (1)\\ 2ab=6 & (2)\\ a^2+b^2=10 & (3)\end{cases}$$

där ekv. (3) fås av $|a+ib|^2=|-8+6i| \iff a^2+b^2=10.$

(1)+(3) ger $2a^2=2 \iff a=\pm 1$. (3)-(1) ger $2b^2=18 \iff b=\pm 3.$

(2) ger att a och b har samma tecken.

Vi får $z+3i=a+ib=\begin{cases} 1+3i\\ -1-3i\end{cases} \iff z=\begin{cases} 1\\ -1-6i\end{cases}$ som ger svaret.

Svar: $z=-1-6i$, 1.

3. a) $\left(4+(-\frac{x}{2})\right)^{14}=\sum_{k=0}^{14}\binom{14}{k}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)^{k}\cdot 4^{14-k}$.

Eftersom man är intresserad av koefficienten för x^9 ser man att $k=9$.

Vi får

$$\binom{14}{9}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)^{9}\cdot 4^5=\binom{14}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{9}\cdot 4^5\cdot x^9=-\frac{4^5}{2^9}\cdot\frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot x^9=-14\cdot 13\cdot 22\cdot x^9$$

Svar: Koefficienten för x^9 är $-14\cdot 13\cdot 22=-4004$.

b) $\sum_{k=1}^{\infty}2^{3k}=\sum_{k=1}^{\infty}(2^3)^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}8^k=\lim_{n\to\infty}8\cdot\frac{8^{n-1+1}-1}{8-1}=\infty\Rightarrow$ *divergent*.

Alternativ: Kvoten $=8>1\Rightarrow$ Serien är divergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty}3^{-2k}=\sum_{k=1}^{\infty}(3^{-2})^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{9}\right)^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{9}\cdot\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^n-1}{\frac{1}{9}-1}=\frac{1}{9}\cdot\frac{0-1}{-\frac{8}{9}}=\frac{1}{8}\Rightarrow$$

$\sum_{k=1}^{\infty}3^{-2k}$ är konvergent med summan $\frac{1}{8}$.

4. $y=\frac{x-3x^2}{x+2}$, $\quad D_f=\{x\in R, x\neq -2\}$.

1. Lodräta asymptoter kan finnas i $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x-3x^2}{x+2}=\left(\frac{-14}{0^+}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to -2^-}\frac{x-3x^2}{x+2}=\left(\frac{-14}{0^-}\right)=+\infty,$$

d.v.s. $x=-2$ är en lodrät asymptot.

2. Sneda asymptoter: $k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3x^2}{(x+2)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-3x)}{(x+2)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-3x}{x+2}=-3$

$$m=\lim_{x\to\infty}f(x)-kx=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3x^2}{x+2}+3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-3x^2+3x(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{x+2}=7.$$

Samma gäller då $x\to-\infty$.

Vi får att $y=-3x+7$ är en sned asymptot då $x\to\pm\infty$.

3. Derivatan: $y'=\frac{(1-6x)(x+2)-(x-3x^2)}{(x+2)^2}=\frac{-3x^2-12x+2}{(x+2)^2}$

Stationära punkter: $f'(x)=0$

$$-3x^2-12x+2=0\Leftrightarrow x^2+12x-\frac{2}{3}=0\Leftrightarrow x=-2-\sqrt{\frac{14}{3}},\ x=-2+\sqrt{\frac{14}{3}}.$$

4.Teckenschema:

x		$-2-\sqrt{\frac{14}{3}}$		-2		$-2+\sqrt{\frac{14}{3}}$	
$f'(x)$	$-$	0	+	Ej def	+	0	$-$
$f(x)$	↘	lok.min	↗	Ej def.	↗	Lok. max.	↘

5. a) $f(x) = x - 3\sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \pi$. Vi löser ekvationen:

$f'(x) = 1 - 3\cos x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\cos x - (2\cos^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$2 - 3\cos x - 2\cos^2 x = 0$. Sätt $\cos x = t$, vi får $2 - 3t - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + \frac{3}{2}t - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$t_1 = -2, t_2 = \frac{1}{2}$. Vi får

1) $\cos x = -2$ ger ingen lösning.

2) $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, $n \in Z$.

b) Tangentens ekvation är $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

$x_0 = 0, y_0 = 1 + (2+0) \cdot \arctan(3 \cdot 0) = 1 + 2 \cdot 0 = 1$.

$f'(x) = D(1 + (2+x) \cdot \arctan 3x) = 1 \cdot \arctan 3x + (2+x) \cdot \frac{3}{1+9x^2}$.

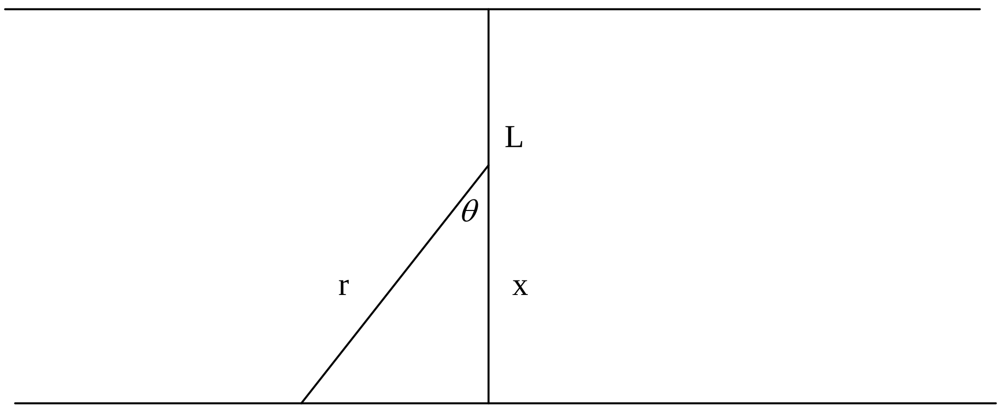
$x_0 = 0$ ger $f'(0) = 0 + \frac{6}{1} = 6$.

Insättning i tangentens ekvation ger $y - 1 = 6 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = 6x + 1$.

Insättning i normalens ekvation $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ ger

$y - 1 = -\frac{1}{6} \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{6}x + 1$.

6.



Belysningen är $I = \frac{k}{r^2}\cos\theta = \frac{k}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = k\cdot\frac{x}{r^3}$, där k är en konstant.

Vi använder Pythagoras sats $r^2 = 25 + x^2$ för att få bara en variabel.

Funktionen blir $I(x) = k\cdot\frac{x}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}}$.

Derivera och bestäm derivatans nollställen:

$$I'(x) = k\cdot\frac{(x^2+25)^{\frac{3}{2}} - x\cdot\frac{3}{2}\cdot(x^2+25)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+25)^3} = k\cdot\frac{(x^2+25)^{\frac{3}{2}} - 3x^2\cdot(x^2+25)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+25)^3} =$$

(bryt ut $(x^2+25)^{\frac{1}{2}}$)= $k\frac{(x^2+25)^{\frac{1}{2}}\cdot\left((x^2+25)-3x^2\right)}{(x^2+25)^3} = k\frac{25-2x^2}{(x^2+25)^{\frac{5}{2}}}$.

Stationära punkter: $I'(x) = 0 \iff 25 - 2x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{25}{2}} = \pm\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Obs! Bara $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$ duger.

Teckenschema:

x	0		$\frac{5}{\sqrt{2}}$	
$I'(x)$		+	0	–
$I(x)$	0	↗	globalt max.	↘

Svar: Lampan ska hänga $\frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3{,}54$ m över golvet.