LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
ANALYS 1
2018-08-31

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^3+x^2}{x^6+2x+6^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{6^x}-\dfrac{x^3}{6^x}+\dfrac{x^2}{6^x}}{\dfrac{x^6}{6^x}+\dfrac{2x}{6^x}+\dfrac{6^x}{6^x}}=\dfrac{0}{1}=0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{8n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)^{8}=e^8$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{e^{2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cdot 2x}{(e^{2x}-1)\cdot 2}=\dfrac{5}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{e^{2x}-1}=\dfrac{5}{2}\cdot 1=\dfrac{5}{2}$

d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left(\dfrac{2}{7}\right)^k=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{2}{7}\right)^k=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{7}\right)^2\dfrac{\left(\dfrac{2}{7}\right)^n-1}{\dfrac{2}{7}-1}=\left(\dfrac{2}{7}\right)^2\dfrac{0-1}{-\dfrac{5}{7}}=\dfrac{4}{35}$

2. a) $\left|\dfrac{(-3-3i)5i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)}\right|=\dfrac{|-3-3i|\cdot|5i|}{\left|1+i\sqrt{3}\right|}=\dfrac{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}\cdot 5}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{5\sqrt{18}}{2}=\dfrac{5\cdot 3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}=\dfrac{15}{\sqrt{2}}.$

$\arg z=\arg\dfrac{\left(-3-3i\right)5i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\arg(-3-3i)+\arg 5i-\arg(1+i\sqrt{3})=-\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{7\pi}{12}$

b) $z^3=-27$. Sätt $z=re^{i\theta}$. Skriv om HL på polär form. Ekvationen blir

$$\left(re^{i\theta}\right)^3=27e^{i\pi}\ \Leftrightarrow\ r^3e^{i3\theta}=27e^{i\pi}\ \Rightarrow\ \begin{cases} r^3=27 \\ 3\theta=\pi+n2\pi,\ \ n\in Z\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} r=3 \\ \theta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{n2\pi}{3}\end{cases}$$

d.v.s. $\underline{z=3e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{n2\pi}{3}\right)}}$.

$n=0:\quad z_0=3(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

$n=1:\quad z_1=3(\cos\pi+i\sin\pi)=-3.$

$n=2:\quad z_2=3(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3})=\dfrac{3}{2}-i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

3. a) $\left(1+(-2x)\right)^{17} = \sum_{k=0}^{17} \binom{17}{k} \cdot \left(-2x\right)^{k} \cdot 1^{17-k}$.

Eftersom man är intresserad av koefficienten för x^3 ser man att $k = 3$.

Vi får $\binom{17}{3} \cdot (-2x)^3 \cdot 1^{14} = \binom{17}{3} \cdot (-8) \cdot x^3 = -8 \cdot \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 = -5440x^3$

Svar: Koefficienten för x^3 är -5440.

.

b) $4^{\frac{1}{x}-2} = \frac{\ln\sqrt{e}}{8} \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{x}-2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{x}-2} = 4^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0.$

dvs. ekvationen saknar lösning.

4. a) $f(x) = x - (1+x^2) \cdot \arctan x$

$f'(x) = 1 - \left(2x \cdot \arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2}\right) = -2x \cdot \arctan x$.

$f'(1) = -2 \cdot \arctan 1 = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

b) $f(x) = \frac{2}{x} \cdot \ln\frac{x}{2}$.

$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \cdot \ln\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{x^2}(1 - \ln\frac{x}{2})$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{x}{2} = 1$ ger stationära punkter $x = 2e$.

Punkten ligger i intervallet $\left[1,\ 2e^2\right]$.

Vi beräknar funktionsvärden i den stationära punkten och ändpunkterna och väljer största och minsta värdet :

$f(1) = 2\ln\frac{1}{2} = -2\ln 2$, $f(2e) = \frac{2}{2e}\ln e = \frac{1}{e}$, $f\left(2e^2\right) = \frac{2}{2e^2}\ln e^2 = \frac{2}{e^2}$.

Svar: $f_{\max} = \frac{1}{e}$, $f_{mim} = -2\ln 2$.

5. $y = f(x) = \dfrac{1}{x \cdot e^x}, \quad x \neq 0.$

Lodrät asymptot kan finnas i $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x \cdot e^x} = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x \cdot e^x} = -\infty$, d.v.s. $x = 0$ är en lodrät asymptot.

Vågräta asymptoter:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x \cdot e^x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x \cdot e^x} = -\infty$

d.v.s. $y = 0$ är en vågrät asymptot då $x \to +\infty$.

$$f'(x) = -\left(x \cdot e^x\right)^{-2} \cdot (e^x + x \cdot e^x) = -\frac{1+x}{x^2 \cdot e^{2x}} = 0.$$

Stationära punkter: $f'(x) = 0$ ger $x = -1.$

Teckenschema

x		-1		0	
$x+1$	-	0	-		-
$\dfrac{1}{(x-2)^2}$	-		+		+
$f'(x)$	+	0	-	odef.	-
$f(x)$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	odef	$\searrow$

$f(-1) = -e$ lokalt maximum.

Rita kurvan.

Svar: $x = -1$ är ett lokalt maximum, $x = 0$ är en lodrät asymptot,
och $y = 0$ är en vågrät asymptot då $x \to +\infty$

6. Givet en kurva $y = \dfrac{a^2}{x}$ Visa att för varje val av tangeringspunkt $x_0 > 0$ så bildar tangenten tillsammans med x- och y-axlarna en triangel med konstant area.

Ekvationen för tangenten i punkten $\left(x_0, \dfrac{a^2}{x_0}\right)$ är:

$$y - \frac{a^2}{x_0} = y'(x_0)(x - x_0) \qquad y'(x) = -\frac{a^2}{x^2} \text{ och } y'(x_0) = -\frac{a^2}{x_0{}^2}$$

Vi får $y - \dfrac{a^2}{x_0} = -\dfrac{a^2}{x_0{}^2}(x - x_0) \Leftrightarrow y = \dfrac{a^2}{x_0} - \dfrac{a^2}{x_0{}^2}(x - x_0)$

Skärning med y-axel: $y_1 = \dfrac{a^2}{x_0} - \dfrac{a^2}{x_0{}^2}(0 - x_0) = \dfrac{2a^2}{x_0}$.

Skärning med x-axel: $0 = \dfrac{a^2}{x_0} - \dfrac{a^2}{x_0{}^2}(x - x_0) = \dfrac{a^2}{x_0{}^2}(x_0 - x + x_0) = \dfrac{a^2}{x_0{}^2}(2x_0 - x) = 0.$

$\Leftrightarrow x_1 = 2x_0$.

Arean av triangeln är:

$$A = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2} = \frac{\mathrm{x}_1 \cdot \mathrm{y}_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \frac{2a^2}{x_0} = 2a^2.$$

Resultatet är konstant (oberoende av x_0).