LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **LÖSNINGAR**
MATEMATIK **ANALYS 1**
Helsingborg **2022-04-19**

1. a) $f'(x)=\dfrac{4x^3}{2}+0-\dfrac{1}{\cos^2 x}=2x^3-\dfrac{1}{\cos^2 x}$

b) $f'(x)=1\cdot\sin 3x+x\cdot 3\cos 3x=\sin 3x+3x\cos 3x$

c) $f'(x)=D(1+2x)^{-3}=-3(1+2x)^{-4}\cdot 2=-\dfrac{6}{(1+2x)^4}$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}}2x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

e) $f'(x)=\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$

2. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9+8x+5^x}{3^x+x-5^x+6}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ =dividera med $5^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^9}{5^x}+\dfrac{8x}{5^x}+1}{\dfrac{3^x}{5^x}+\dfrac{x}{5^x}-1+\dfrac{6}{5^x}}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\cdot\ln(1+7x)}{7x}=7\cdot 1=7$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}3\cdot 2^{-k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}3\left(\dfrac{1}{2}\right)^k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-1}{\dfrac{1}{2}-1}=3$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=(\infty-\infty)$ =förläng med konjugatet=

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}=\left(\frac{4}{\infty}\right)=0$$

3. a) $\left|\dfrac{(3+i)\,15i}{(1+2i)^4(\sqrt{2}+\sqrt{6}\ i)}\right|=\dfrac{\sqrt{3^2+1^2}\cdot 15}{\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^4\cdot\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}}=\dfrac{\sqrt{10}\cdot 15}{5^2\cdot\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 3}{5\cdot 2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5\cdot 2}=\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$

b) $z^5 = \left(2e^{\frac{\pi}{15}i}\right)^5 = 2^5 e^{\frac{\pi}{3}i}$

$$2^5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^4\left(1 + i\sqrt{3}\right) = 16 + 16\sqrt{3}\cdot i\,.$$

c) $z^2 = -7 - 24i$. Sätt $z = a + bi$. Rötterna är $z_1 = 3 - 4i,\ z_2 = -3 + 4i$.

4. a) $f'(x) = (\sin 2x - 2x)' = 2\cos 2x - 2$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x - 2 = 0$.

Vi löser ekvationen

$2\cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = n2\pi \Leftrightarrow x = n\pi,\ n \in Z$

Vi väljer x som hamnar i $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Vi får att bara $x = 0$ ligger i intervallet.

Jämför funktions värden i $x = -\frac{\pi}{2}$: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi) + \pi = \pi$, $x = 0$: $f(0) = \sin 0 - 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi) - \pi = -\pi$.

Svar: Största värdet är π, då $x = -\frac{\pi}{2}$ och minsta är $-\pi$, då $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Ekvationen för **tangenten** är $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, där $x_0 = 0$ och
$y_0 = 2 + 0 + (1+0)\arctan 0 = 2$

Vi bestämmer $f'(x)$: $y' = 1 + 2x\cdot\arctan x + \left(1 + x^2\right)\cdot\frac{1}{1+x^2} = 2 + 2x\cdot\arctan x$

Derivatan i punkten $x_0 = 0$ är $f'(0) = 2 + 0\cdot\arctan 0 = 2$

Ekvationen för tangenten blir: $y - 2 = 2\cdot(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2$

Svar: $y = 2x + 2$

5. $f(x) = \dfrac{e^x}{2x-4}$, $x \neq 2$.

Lodrät asymptot kan finnas i $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, d.v.s. $x = 2$ är en lodrät asymptot.

Vågräta asymptoter:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x-4}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{2x-4}=0$$

d.v.s. $y=0$ är en vågrät asymptot då $x\to-\infty$

Vi kontrollerar om det finns en sned asymptot $y=kx+m$ då $x\to\infty$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x}{x\cdot(2x-4)}=\infty\,.$$

Alltså saknas sned asymptot då $x\to\infty$.

$$f'(x)=\frac{e^x(2x-4)-2e^x}{(2x-4)^2}=\frac{e^x(2x-6)}{(2x-4)^2}.$$

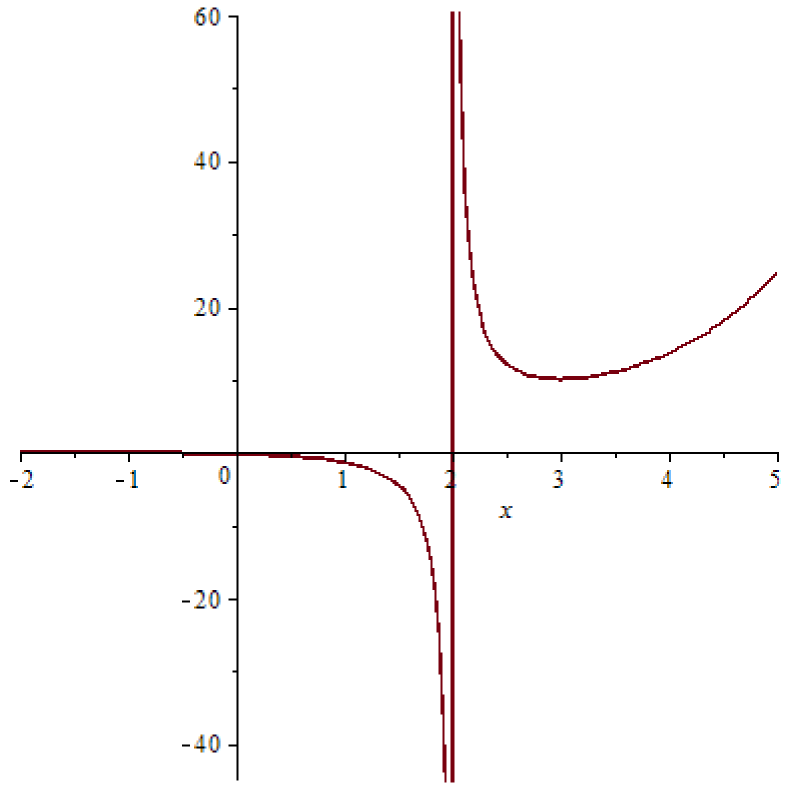
Stationära punkter: $f'(x)=0$ ger $x=3$.

Teckenschema

x		2		3	
$2x-6$	$-$		$-$	0	+
$\frac{e^x}{(2x-4)^2}$	+	odef	+		+
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	+
$f(x)$	$\searrow$	odef	$\searrow$	$\frac{e^3}{2}$	$\nearrow$

$f(3)=\frac{e^3}{2}$ lokalt minimivärde. Rita kurvan.

Svar: $x=3$ är ett lokalt minimum, $x=2$ är en lodrät asymptot,
och $y=0$ är en vågrät asymptot då $x\to-\infty$



6. Triangelns omkrets är $f(x) = 1 + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(1-x)^2+1}$.

$$f'(x) = 0 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{(1-x)\cdot(-1)}{\sqrt{(1-x)^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-1}{\sqrt{(1-x)^2+1}} = \frac{x\sqrt{(1-x)^2+1} + (x-1)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{(1-x)^2+1}}$$

$$f'(x) = 0: \frac{x\sqrt{(1-x)^2+1} + (x-1)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(1-x)^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{(1-x)^2+1} + (x-1)\sqrt{x^2+1} = 0$$

$\Leftrightarrow x\sqrt{(1-x)^2+1} = -(x-1)\sqrt{x^2+1}$. Vi kvadrerar HL och VL:

$\Leftrightarrow x^2(1-x)^2+1) = (x-1)^2\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow 2x^2 - 2x^3 + x^4 = x^4 + x^2 - 2x^3 - 2x + x^2 + 1$

$\Leftrightarrow -2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Man förstår att $0 \le x \le 1$.

x	0		1/2		1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$2+\sqrt{2}$	$\searrow$	$1+\sqrt{5}$	$\nearrow$	$2+\sqrt{2}$

Triangelns minsta möjliga omkretsen är

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=1+\sqrt{\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{5}{4}}=1+\sqrt{5}$$