LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA — **LÖSNINGAR**
MATEMATIK — **ANALYS 1**
Helsingborg — **2022-01-14**

1. a) $\lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{5\cdot 3x}{3\cdot \sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x} = \frac{5}{3}\cdot 1 = \frac{5}{3}.$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x} + \arctan 2x\right) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2\cdot 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^5+6^x}{x^{21}+3x+5\cdot 6^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \textit{dividera med } 6^x = \frac{1}{5}$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{2n} = \left(typ 1^{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{\frac{3\cdot 2n}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{6n}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}.$

2. a) $|z| = \left| z = \frac{(3+4i)\cdot(2-i)^2}{(5i)^3}\right| = \frac{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\left(\sqrt{2^2+(-1)^2}\right)^2}{\left(\sqrt{0^2+5^2}\right)^3} = \frac{5\cdot 5}{5^3} = \frac{1}{5}.$

b) **Alt1**: Talet $z = \sqrt{3} - i$ på polär form blir $z = 2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ övergår i

$$z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{2\pi}{6}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

Alt2 (ngt tjusigare): Vridning vinkeln $\frac{\pi}{2}$ i positiv led innebär multiplikation med i.

Vi får $z\cdot i = \left(\sqrt{3}-i\right)\cdot i = i\sqrt{3} - i^2 = 1 + i\sqrt{3}$.

c) $z^3 = 1+i$. Sätt $z = re^{i\theta}$. Skriv om HL på polär form. Ekvationen blir

$$\left(re^{i\theta}\right)^3 = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} r^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = \frac{\pi}{4} + n2\pi, \ \ n\in Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{6}} \\ \theta = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{n2\pi}{3} \end{cases} \qquad \text{dvs.} \quad \underline{z = 2^{\frac{1}{6}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{n2\pi}{3}\right)},\ n = 0,1,2.}$$

Svar: $\underline{z = 2^{\frac{1}{6}} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}},\ 2^{\frac{1}{6}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}},\ 2^{\frac{1}{6}} \cdot e^{i\frac{17\pi}{12}}.}$

3. a) Funktionerna $y = x^2$ och $y = \ln x$ är kontinuerliga. Vi testar om $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = 1$. $f(x)$ är kontinuerlig om $\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$.

$\lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 \neq f(1) = \ln 1 = 0$`, d v s $f(x)$ är diskontinuerlig i punkten $x = 1$.

b) $(2x-1)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} \cdot (2x)^k \cdot (-1)^{6-k} =$

$$= \binom{6}{0} \cdot (2x)^0 \cdot (-1)^6 + \binom{6}{1} \cdot (2x)^1 \cdot (-1)^5 + \binom{6}{2} \cdot (2x)^2 \cdot (-1)^4 + \binom{6}{3} \cdot (2x)^3 \cdot (-1)^3 + \binom{6}{4} \cdot (2x)^4 \cdot (-1)^2 +$$

$$+ \binom{6}{5} \cdot (2x)^5 \cdot (-1) + \binom{6}{6} \cdot (2x)^6 \cdot (-1)^0 =$$

$$= 1 - 6 \cdot 2x + 15 \cdot 2^2 x^2 - 20 \cdot 2^3 x^3 + 15 \cdot 2^4 \cdot x^4 - 6 \cdot 2^5 x^5 + 2^6 x^6 =$$

$$= 1 - 12x + 60 \cdot x^2 - 80 \cdot x^3 + 240 \cdot x^4 - 192x^5 + 64x^6.$$

c) Vi beräknar varje summa för sig. $\sum_{k=0}^{8} 2 \cdot 3^k = 2\dfrac{3^{8-0+1} - 1}{3-1} = 2\dfrac{3^9 - 1}{2} = 3^9 - 1$

$$\sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{0-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}.$$

Vi får $\sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k} + \sum_{k=0}^{8} 2 \cdot 3^k = \dfrac{1}{6} + 3^9 - 1 = 3^9 - \dfrac{5}{6}$.

4. a) $y' = (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y'' = \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)' = \left((\cos x)^{-2}\right)' = -2(\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

b) Vi förenklar först och sedan deriverar:

$$D \ln \frac{x^2 \cdot e^x}{\sqrt{2x-3}} = D\left(\ln x^2 + \ln e^x - \ln \sqrt{2x-3}\right) = D\left(2\ln x + x - \frac{1}{2}\ln(2x-3)\right) =$$

$$= \frac{2}{x} + 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-3} \cdot 2 = \frac{2}{x} + 1 - \frac{1}{2x-3} = \frac{2(2x-3) + x(2x-3) - x}{x(2x-3)} = \frac{2x^2-6}{x(2x-3)}$$

c) Ekvationen för **tangenten** är $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, där $x_0 = 3$ och $y_0 = \dfrac{8}{5}$

Vi bestämmer y'.

Alt1: Vi deriverar implicit**:** $\left(\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4}\right)' = 1' \Leftrightarrow \dfrac{2x}{25} + \dfrac{2y \cdot y'}{4} = 0$.

Lös ut y': $\dfrac{2y \cdot y'}{4} = -\dfrac{2x}{25} \Leftrightarrow y' = -\dfrac{2x}{25} \cdot \dfrac{4}{2y} \Leftrightarrow y' = -\dfrac{4x}{25y}$.

Derivatan i punkten $\left(3, \dfrac{8}{5}\right)$ är $y' = -\dfrac{4 \cdot 3}{25 \cdot \frac{8}{5}} = -\dfrac{3}{10} = -0{,}3$

Ekvationen för tangenten blir:

$$y - \frac{8}{5} = -0{,}3 \cdot (x-3) \Leftrightarrow y = -0{,}3x + 0{,}9 + \frac{8}{5} \Leftrightarrow y = -0{,}3x + 2{,}5$$

Svar: $y = -0{,}3x + 2{,}5$

5. $f(x) = \dfrac{x^2}{16-4x}$, $x \neq 4$.

1. Lodrät asymptot kan finnas i $x = 4$.

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \infty$, d.v.s. $x = 4$ är en lodrät asymptot.

2. Vågräta asymptoter:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{16-4x} = -\infty$ och $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{16-4x} = \infty$, d.v.s. inga vågräta asymptoter då $x \to +\infty$ och $x \to -\infty$.

3. Sneda asymptoter: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{16-4x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\frac{16}{x}-4} = -\dfrac{1}{4}.$

$$m = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{16-4x}+\frac{1}{4}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{4-x} = -1.$$

Samma gäller då $x \to -\infty$. Vi får att $y = -\dfrac{1}{4}x - 1$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$.

(Här kan vi även använda polynomdivision för att få ekvationen för en sned asymptot.)

$$f'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2x(4-x)-x^2(-1)}{(4-x)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-x^2+8x}{(4-x)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-x(x-8)}{(4-x)^2}.$$

Stationära punkter: $f'(x) = 0$ ger $x = 0$ eller 8.

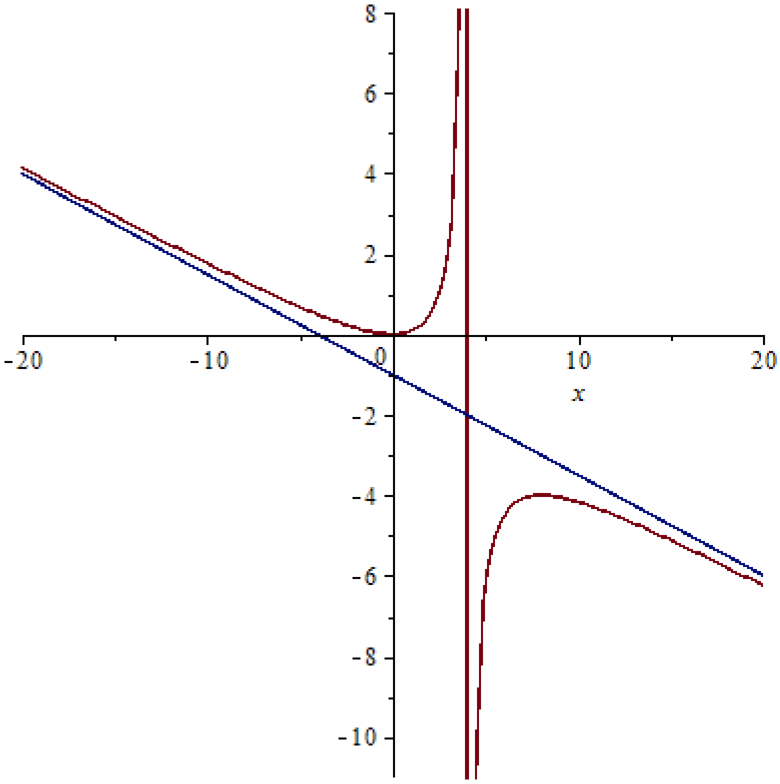
Teckenschema

		0		4		8	
$-x$	+	0	−		−		−
$x-8$	−		−		−	0	+
$\dfrac{1}{(4-x)^2}$	+		+	odef	+		+
	−	0	+		+		−
	$\searrow$	0	$\nearrow$	odef	$\nearrow$	-4	$\searrow$

$f(8) = -4$ är ett lokalt maximum och $f(0) = 0$ är ett lokalt minimum.

Svar: $f(8) = -4$ är ett lokalt maximum och $f(0) = 0$ är ett lokalt minimum,

$y = -\dfrac{x}{4} - 1$ är en sned asymptot då $x \to \pm\infty$ och $x = 4$ är en lodrät asymptot.



6. Rektangelns omkrets är 24 cm. Detta ger $2a + 2b = 24 \Leftrightarrow a + b = 12$.

Antag att rektangeln roterar kring sidan b.

Då uppkommer en cylinder med radien a och höjden b ($a > 0, b > 0$).

Cylinderns volym V blir : $V = \pi a^2 b$ och med $b = 12 - a$ får vi

$V(a) = \pi a^2(12 - a) = 12\pi a^2 - \pi a^3$

$V'(a) = 24\pi a - 3\pi a^2 = 3\pi a(8 - a) = 0 \Leftrightarrow a = 8$ eller $(a = 0)$.

Alt1: Teckenschema:

a		8	
$V'(a)$	+	0	-
$V(a)$	↗	256π	↘

Alt2: Använd andraderivatan: $V''(a) = \left(24\pi a - 3\pi a^2\right)' = 24\pi - 6\pi a$.

$V''(8) = 24\pi - 6\pi \cdot 8 = -24\pi < 0$.

Cylindern får störst volym då $a = 8$. $V(8) = \pi\ 8^2\,(12-8) = 64\pi \cdot 4 = 256\pi$.

Svar: Cylinderns största volym är 256π v.e.

SLUT.