LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

LÖSNINGAR
ANALYS 1
2021-08-27

Del 1

1. a) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5\cdot 2^x+3}{x^{15}+2^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{2^x}+5+\frac{3}{2^x}}{\frac{x^{15}}{2^x}+1}=\frac{0+5+0}{0+1}=5.$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{5x}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 0}\frac{2}{5}\cdot\frac{5x}{e^{5x}-1}=\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{2}{5}$.

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}=0.$

d) $\sum_{k=2}^{n}(\frac{3}{4})^k=(\frac{3}{4})^2\frac{(\frac{3}{4})^{n-2+1}-1}{\frac{3}{4}-1}=\frac{9}{16}\cdot\frac{(\frac{3}{4})^{n-1}-1}{-\frac{1}{4}}=\frac{9}{4}(1-(\frac{3}{4})^{n-1})\to\frac{9}{4}$, $n\to\infty.$

Svar: $\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{3}{4})^k=\frac{9}{4}.$

2. a) $z=2-i2\sqrt{3}$ $,|\,z\,|=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2}=4.$

$z=4\cdot\left(\frac{2}{4}-i\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\cdot(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})=4\cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}.$

b) $\left|\frac{(1-i)^2\cdot(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{27}-3i)}\right|=\frac{|1-i|^2\cdot|\sqrt{3}+i|}{|\sqrt{27}-3i|}=\frac{\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^2\cdot\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}{\sqrt{(\sqrt{27})^2+(-3)^2}}=\frac{2\cdot 2}{6}=\frac{2}{3}$

c) $z^2+2+4i=10-2i\Leftrightarrow z^2=8-6i$.

Sätt $z=a+ib$. Man får då $(a+bi)^2=8-6i\Leftrightarrow a^2+2abi+b^2=8-6i$.
Jämförelsen och $|a+bi|^2=|8-6i|$ ger

$$\begin{cases}a^2-b^2=8 & (1)\\ 2ab=-6 & (2)\\ a^2+b^2=10 & (3)\end{cases}$$

(1)+(3) ger $2a^2=18\Leftrightarrow a=\pm 3$. Insättning i (2) ger $a=3, b=-1$ och $a=-3, b=1$

Svar: $z=3-i,\ \ z=-3+i$.

3. a) $y = e^{x^2}$, $x > 0$. Vi bestämmer x-kordinaten då $y_0 = e$: $e = e^{x^2}$ **,** vi får att $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Eftersom $x > 0$ så får vi att $x_0 = 1$

$y' = e^{x^2} \cdot 2x$ och $y'(1) = 2e.$

Tangentens ekvation i punkten $x = 1$

$$y - e = 2e(x-1) \Leftrightarrow y = 2ex - 2e + e \Leftrightarrow y = 2ex - e.$$

b) Funktionen $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ är kontinuerlig i intervallet . $\left[\dfrac{1}{e}, e^3\right]$, d v s största och minsta värde existerar.

$$f'(x) = \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - (\ln x)^2 \cdot 1}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ eller } \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2 .$$

Vi jämför funktions värde:

$$f(e^{-1}) = \frac{(\ln e^{-1})^2}{e^{-1}} = \frac{(-1)^2}{\frac{1}{e}} = e\,,\ f(1) = \frac{(\ln 1)^2}{1} = 0\,,\ f(e^2) = \frac{(\ln e^2)^2}{e^2} = \frac{4}{e^2}\,,$$

$$f(e^3) = \frac{(\ln e^3)^2}{e^3} = \frac{9}{e^3}\,.$$

Eftersom $f(e^2) < 1$ och $f(e^3) < 1$ så får vi att $f_{\max} = e$ och $f_{\min} = 0$.

Del 2

4. a) $D\arctan(3x) = \dfrac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \dfrac{3}{1+9x^2}$

b) $D\left(\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{x^2}{2}\right) = 2(x^{-2})' + \dfrac{1}{2}(x^2)' = -4x^{-3} + \dfrac{1}{2} \cdot 2x = -\dfrac{4}{x^3} + x$

c) $D\left((2-x)^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x\right) = 2(2-x)\cdot(-1)\cos x - (2-x)^2 \cdot \sin x + 2\sin x + 2x \cdot \cos x =$

$= -4\cos x + 2x \cdot \cos x - (2-x)^2 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x =$

$= 4x \cdot \cos x - 4\cos x - (2-x)^2 \cdot \sin x + 2\sin x$

d) $D\left(e^{5x} + x\right)^3 = 3\left(e^{5x} + x\right)^2 \cdot (5e^{5x} + 1) = (15e^{5x} + 3) \cdot \left(e^{5x} + x\right)^2$

5. $y = f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$, $D_f = \{x \in R : x \neq 0\}$.

1) f är ej definierad i $x = 0$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3+4}{x^2} = \infty,\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3+4}{x^2} = \infty$. D.v.s. $x=0$ är s.k. lodrät asymptot.

2) Gränsvärden av $f(x)$, då $x \to \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4}{x^2} = \infty,\quad \lim\limits_{x\to-\infty^-} \dfrac{x^3+4}{x^2} = -\infty$, d.v.s inga vågräta asymptoter .

Sneda asymptoter: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4}{x\cdot x^2} = 1,$

$$m = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4}{x\cdot x^2} = 1,\qquad m = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4}{x^2} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2} = 0\,.$$

Vi får att $y = x$ är en sned asymptot, då $x \to \pm\infty$

3) $y' = \dfrac{3x^2\cdot x^2 - (x^3+4)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x^3-8}{x^3} = \dfrac{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}{x^3}$.

Stationära punkter: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ eftersom ekvationen $x^2+2x+4=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+3=0$ saknar lösning.

Teckenschema:

x		0		2	
x-2	–		–	0	+
$1/x^3$	–	Ej def	+		+
$f'(x)$	+	Ej def	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Ej def	$\searrow$	3	$\nearrow$

Lokal minimipunkt i $x=2$. Största och minsta värde saknas.

Skärningen med x-axeln: $y=0: \dfrac{x^3+4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3+4=0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{4}$.

6. Staketets totallängd L är $y+4x$.
Använder vi att den sammanlagda arean $x\cdot y = 6400$ kan staketets totallängd L skrivas som en funktion av y

$L(y) = y + 4\cdot\dfrac{6400}{y} = y + \dfrac{25600}{y}$, $y>0$.

$L'(y) = 1 - \dfrac{25600}{y^2} = \dfrac{y^2-25600}{y^2} = \dfrac{(y-160)(y+160)}{y^2}$. $L'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 160$.

Teckenschema:

y		160	
$L'(y)$	–	0	+
$L(y)$	$\searrow$	Lokalt min	$\nearrow$

Svar: Den parallella delen av staketet dvs. y ska vara 160 m för att staketets totallängd ska bli så liten som möjligt.