

DEL 1

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\cos 3x} = \frac{0}{1} = 0$, b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot 3x}{3 \cdot \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3} \frac{3x}{\sin 3x} = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$,

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^x - x + 1}{x^7 + 7^{x+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7^x}{7^{x+1}} - \frac{x}{7^{x+1}} + \frac{1}{7^{x+1}}}{\frac{x^7}{7^{x+1}} + \frac{1}{7^{x+1}}} = \frac{\frac{1}{7} - 0 + 0}{0 + 1} = \frac{1}{7}$,

d)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} = \left(\frac{-1}{\infty}\right) = 0,$$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2n} = (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2n \cdot 2}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

2. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{3}{7}\right)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{n-2+1} - 1}{\frac{3}{7} - 1} = \frac{9}{49} \cdot \frac{0 - 1}{-\frac{4}{7}} = \frac{9}{28}$.

b) $(2+x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \cdot 2^{12-k} \cdot x^k$.

Eftersom man intresserad av koeff. för x^5 ser man att $k = 5$.

Koefficienten blir $\binom{12}{5} \cdot 2^7 = 12 \cdot 33 \cdot 2^8 = 101376$.

c) $f(x) = \sqrt{5x+1}$ har $D_f : 0 \leq x \leq 3$, $V_f : 1 \leq y \leq 4$.

Lös ut $x : y = \sqrt{5x+1} \Leftrightarrow y^2 = 5x+1 \Leftrightarrow 5x = y^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 1}{5}$.

D.v.s. $f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{5}$ med $D_{f^{-1}} : 1 \leq x \leq 4$.

3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$ $D_f : x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ och $x \neq 2$

1) Lodräta asymptoter kan finnas i $x = -1$ och $x = 2$

Vi faktorerar nämnaren:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{1}{0^+ \cdot (-3)} \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{1}{0^- \cdot (-3)} \right] = \infty,$$

d.v.s. $x = -1$ är en lodrät asymptot.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{4}{3 \cdot 0^+} \right] = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{(x+1)(x-2)} = \left[\frac{4}{3 \cdot 0^-} \right] = -\infty,$$

d.v.s. $x = 2$ är en lodrät asymptot.






Vågräta asymptoter: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = 1$ och : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - x - 2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = 1$

d.v.s. $y = 1$ är en vågrät asymptot då $x \rightarrow +\infty$ och $x \rightarrow -\infty$.

2) Derivatatan blir $f' = \frac{-x^2 - 4x}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-x(x+4)}{(x^2 - x - 2)^2}$.

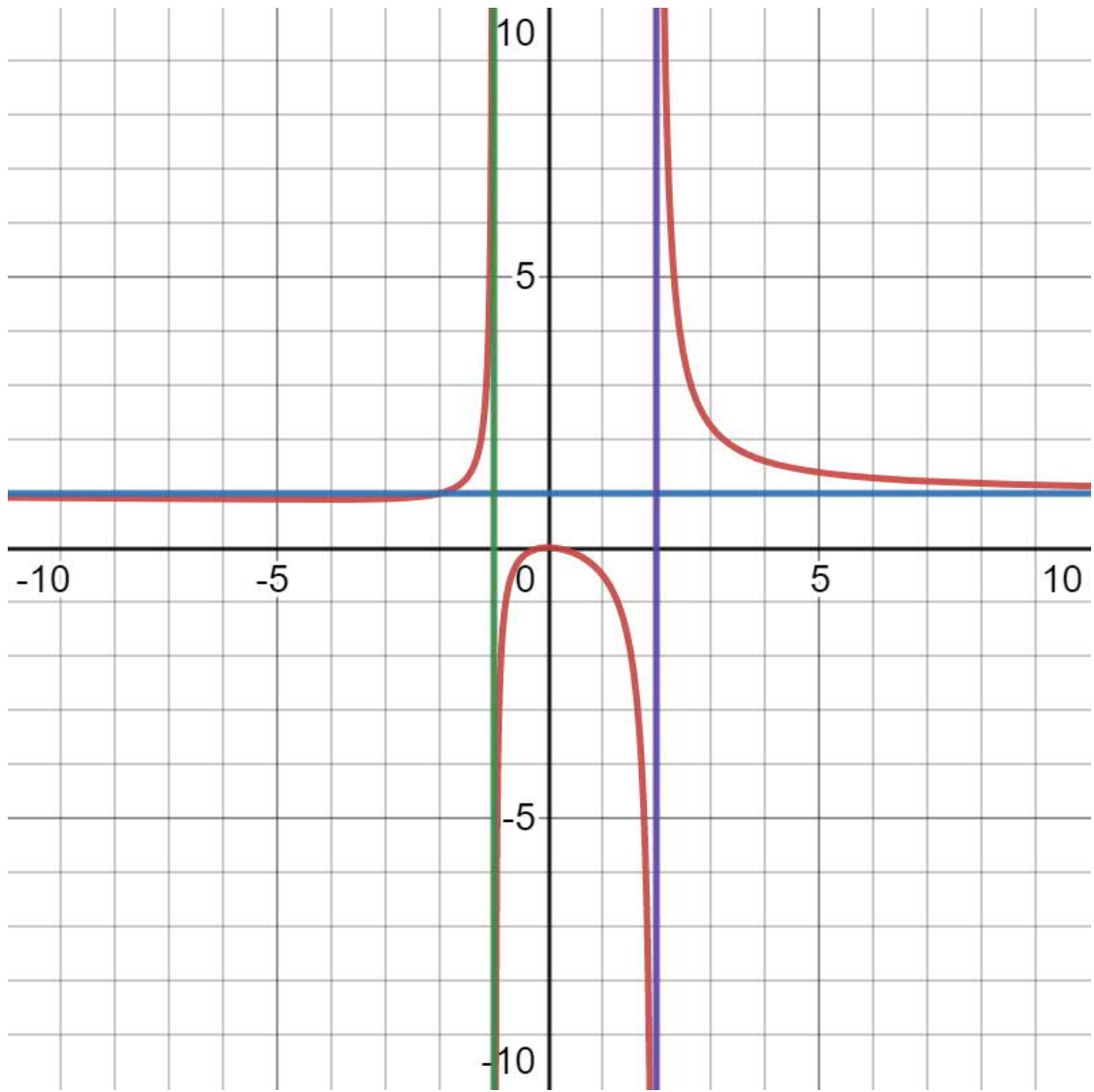
3) Stationära punkter: $f'(x) = 0$ ger $x = 0$ eller $x = -4$

4) Teckenschema

x		-4		-1		0		2	
$f'(x)$	-		+		+		-		-
$f(x)$		Lok.min		Odef.		Lok.max		Odef.	

$f(-4) = \frac{8}{9}$ är ett lokalt minimum, lokalt minimum i $f(0) = 0$

Rita kurvan.



DEL 2

$$4. \text{ a) } |z| = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{-3i \cdot (2+2i)} \right| = \frac{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}}{3 \cdot \sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{8}} = \frac{2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$\arg z = \arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(-3i) - \arg(2+2i) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

b) Lös ekvationen $z^2 + 2iz = -6 - 24i$. Kvadratkomplettera V.L.

$$(z+i)^2 - i^2 = -6 - 24i \Leftrightarrow (z+i)^2 = -7 - 24i. \text{ Sätt } z+i = a+ib. \text{ Man får då}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -7 & (1) \\ 2ab = -24 & (2) \\ a^2 + b^2 = 25 & (3) \end{cases}$$

(1)+(3) ger $2a^2 = 18 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3$. Insättning i (2) ger $a = 3, b = -4$ och $a = -3, b = 4$.

Då har vi att $z+i = 3-4i$ och $z+i = -3+4i$. Vi löser ut z och får

$$z = 3-5i, z = -3+3i.$$

Svar: $z = 3-5i, z = -3+3i$.

$$5. \text{ a) } f(x) = 2\sqrt{x} + \arctan 2x, \quad f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{1+4x^2}.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} + 2 \cdot (-1)(1+4x^2)^{-2} \cdot 8x = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{16x}{(1+4x^2)^2}.$$

$$f''(1) = -\frac{1}{2} - \frac{16}{(1+4)^2} = -\frac{1}{2} - \frac{16}{25} = -\frac{57}{50}.$$

$$\text{b) } f'(x) = \left(\ln x + \frac{e}{x} \right)' = \frac{1}{x} + e(x^{-1})' = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x-e}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e \text{ (ligger i intervallet } [1, e^2])$$

Då f är kontinuerlig på det slutna och begränsade intervallet $[1, e^2]$ måste f ha ett största och ett minsta värde som antas i någon av punkterna $1, e$ eller e^2 .

$$f(1) = e, f(e) = \ln e + \frac{e}{e} = 2 \text{ eller } f(e^2) = \ln e^2 + \frac{e}{e^2} = 2 + \frac{1}{e}.$$

Svar: Största värdet är $f(1) = e$ och minsta värdet är $f(e) = 2$.

6. Låt reservoarens korta sida vara a och dess djup h .

$$\text{Volymen } V = 2a \cdot a \cdot h = 2a^2h \Leftrightarrow h = \frac{V}{2a^2}.$$

Arean av reservoarens insida blir:

$$A = 2a \cdot a + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot 2a \cdot h = 2a^2 + 6ah = 2a^2 + 6a \cdot \frac{V}{2a^2} = 2a^2 + \frac{3V}{a}.$$



Arean av reservoarens insida som funktion av a blir:

$$A(a) = 2a^2 + \frac{3V}{a}. \quad \text{Vi får } A'(a) = 4a - \frac{3V}{a^2} = \frac{4a^3 - 3V}{a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^3 - 3V = 0 \Leftrightarrow a^3 = \frac{3V}{4}. \quad \text{Med volymen } V = 972 \text{ m}^3 \text{ får vi}$$

$$a^3 = \frac{3 \cdot 972}{4} = 3 \cdot 243 = 729 = 9^3 \Leftrightarrow a = 9.$$

Teckenschema

a		9	
$A'(a)$	-	0	+
$A(a)$		$A(9)$	

Arean av reservoarens insida blir minimal då

$$a = 9 \quad \text{och} \quad h = \frac{972}{2 \cdot 81} = \frac{12 \cdot 81}{2 \cdot 81} = 6.$$

Svar: Reservoarens sidor är 9 respektive 18 m och höjden 6 m.

SLUT!