LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

SVAR OCH ANVISNINGAR
ANALYS 1
2021-01-15

Del 1:

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+4x-2}{x^6-x^3+4e^x}=-\dfrac{1}{2}$, b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4+4x-2}{x^6-x^3+4e^x}=0$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(8x)}{2x}=4$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{3x}=\dfrac{1}{3}$, e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

2. a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{21}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21-2+1}}{1-\frac{1}{2}}=\ldots=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)=\frac{1}{2}-2^{-21}$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(2x)^k$ är konvergent om kvoten $|2x|<1\Leftrightarrow -1<2x<1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

Summan blir:

$$\sum_{k=2}^{\infty}(2x)^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}(2x)^k=\lim_{n\to\infty}(2x)^2\frac{(2x)^{n-1}-1}{2x-1}=\left((2x)^{n-1}\to 0,\ \text{ty } -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)=(2x)^2\frac{0-1}{2x-1}=\frac{4x^2}{1-2x}$$

c) $$\left(\frac{2}{x}+x\right)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{5-k}\cdot x^k=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^5\cdot x^0+\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^4\cdot x^1+\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^3\cdot x^2+$$

$$+\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2\cdot x^3+\binom{5}{4}\cdot\frac{2}{x}\cdot x^4+\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^0\cdot x^5=\frac{2^5}{x^5}+5\frac{2^4}{x^4}\cdot x+10\frac{2^3}{x^3}x^2+$$

$$+10\frac{2^2}{x^2}x^3+5\frac{2}{x}\cdot x^4+x^5=32x^{-5}+80x^{-3}+80x^{-1}+40x+10x^3+x^5$$

3. $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$ $D_f=\{x\in R: x\neq 2\}$.

1) Vi undersöker diskontinuitets punkter: $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x+1)^2}{x-2}=\left(\dfrac{3^2}{0^+}\right)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x+1)^2}{x-2}=\left(\dfrac{3^2}{0^-}\right)=-\infty$, dvs $x=2$ är en lodrät asymptot.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty},\dfrac{(x+1)^2}{x-2}\approx\dfrac{x^2}{x}=x \text{ för stora x}\right)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x+1)^2}{x-2}=-\infty$, dvs inga vågräta asymptoter.

3) Sneda asymptoter $y=kx+m,\quad x\to\pm\infty$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{(x-2)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x}=1.$$

$$m=\lim_{x\to\infty}f(x)-kx=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x-2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1-x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+1}{x-2}=4.$$

Vi får samma värden på k och m då $x\to-\infty$.

D v s $y=x+4,\quad x\to\pm\infty$ är en sned asymptot.

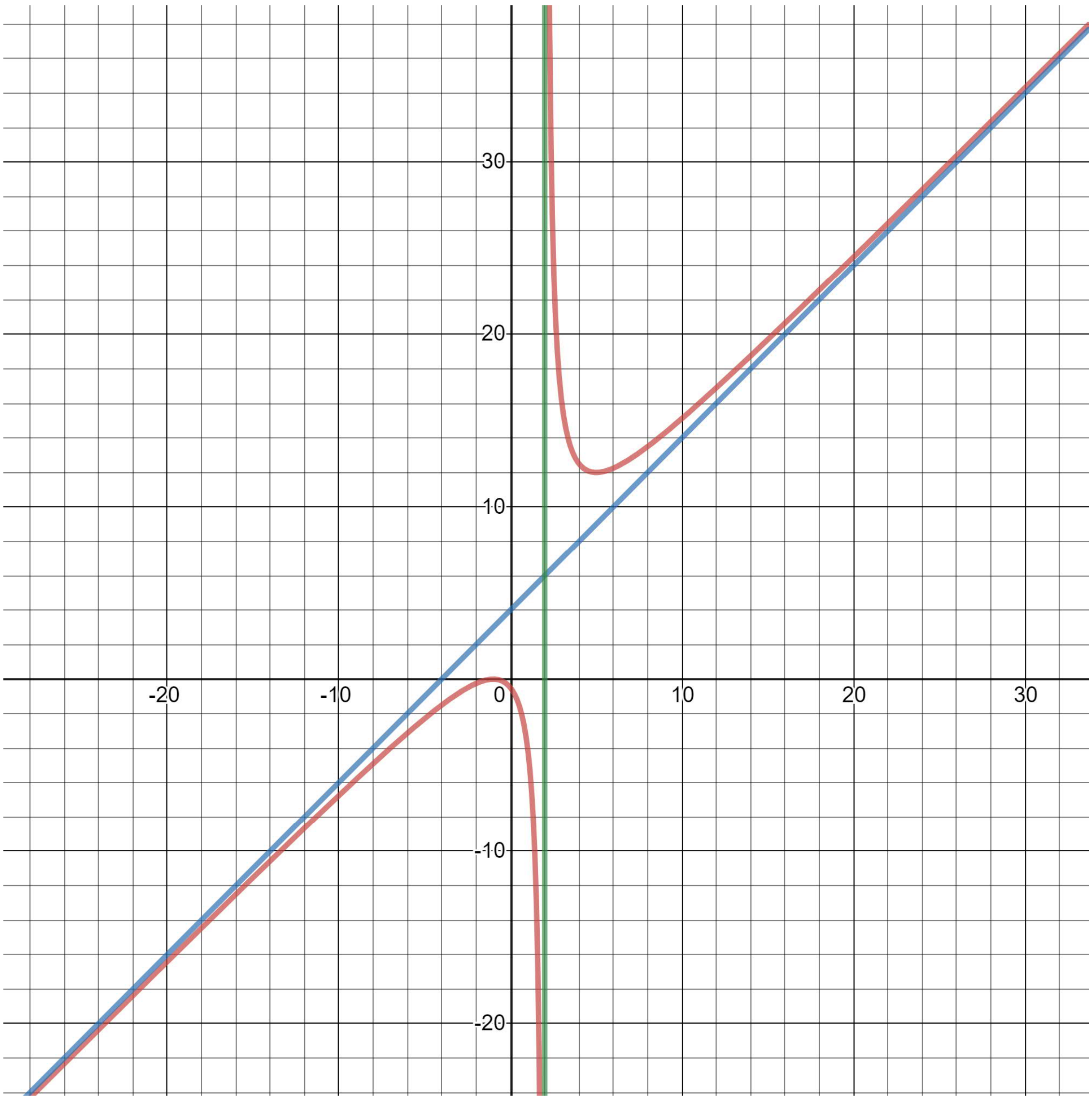
4) $y'=\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x-2}\right)'=\dfrac{(2x+2)(x-2)-(x^2+2x+1)\cdot 1}{\left(x-2\right)^2}=\dfrac{x^2-4x-5}{\left(x-2\right)^2}=\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$

Stationära punkter: $f'(x)=0\quad \dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}=0\Leftrightarrow (x-5)(x+1)=0\Leftrightarrow x=5,\ x=-1.$

x		-1		2		5	
$f'(x)$	+		-	odef	–		+
$f(x)$	$\nearrow$	l.max	$\searrow$	odef	$\searrow$	l.min	$\nearrow$

Lokal maximipunkt i $x=-1,\ y=0$. Lokal minimipunkt i $x=5,\ y=12$

Skärningen med y -axeln: $x=0,\ y=-\dfrac{1}{2}$.



Del 2:

4. a) $(2\cdot e^{\frac{4\pi}{3}i})^3 = 2^3\cdot e^{4\pi i} = 8$

b) $|z| = \dfrac{|1+i|\cdot|2i|}{|\sqrt{3}-i|} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2}{2} = \sqrt{2}$

$\arg z = \arg(1+i) + \arg(2i) - \arg(\sqrt{3}-i) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{-\pi}{6}\right) = \dfrac{11\pi}{12}$

c) Sätt $z = x + iy$ får vi ekvationssystemet $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ som ger

Svar: $2 + 3i$, $-2 - 3i$.

5. a) Normalens ekvation är $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$, där $x_0 = 0$ och

$y_0 = (0+1)e^0 + 3 = 4$. Vi bestämmer

$f'(x) = \left((x^3+1)e^{-x} + 3\right)' = 3x^2 \cdot e^{-x} - (x^3+1)e^{-x} = e^{-x}\left(3x^2 - (x^3+1)\right) = e^{-x}\left(3x^2 - x^3 - 1\right)$

$\Rightarrow \quad f'\left(0\right) = e^0(0 - 0 - 1) = -1$.

Insättning i ekvationen för normalen blir $y - 4 = -\dfrac{1}{-1} \cdot \left(x - 0\right) \Leftrightarrow y = x + 4$.

b) Vi deriverar $f'(x) = D\left(\ln(x^2 - 15)\right)^2 = 2\ln(x^2 - 15) \cdot \dfrac{1}{x^2 - 15} \cdot 2x = \dfrac{4x}{x^2 - 15}\ln(x^2 - 15)$.

Vi löser ekvationen $f'(x) = 0 : \dfrac{4x}{x^2 - 15}\ln(x^2 - 15) = 0$.

Detta ger $x = 0$ eller

$\ln(x^2 - 15) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 15) = \ln 1 \Rightarrow x^2 - 15 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$.

Vi kontrollerar rötterna genom att sätta in dem i $\dfrac{4x}{x^2 - 15}\ln(x^2 - 15)$:

$x = 0$ är falsk, ty $x^2 - 15 < 0$ (logaritmen är odefinierad)

$x = \pm 4$ duger, ty $x^2 - 15 > 0$

Svar: $x = \pm 4$

6. $E(v) = k\dfrac{1}{v}((v - 35)^2 + 296) = k\left(v - 70 + \dfrac{1521}{v}\right)$

$E'(v) = k\left(1 - \dfrac{1521}{v^2}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1521}{v^2} = 0 \Leftrightarrow v^2 = 1521$ Detta ger $v = 39$ km/h $(v > 0)$

Teckenschema ger att vid 39 km/h har E ett minimum.

Svar: 39 km/h .

SLUT!