**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**
**Helsingborg**

**LÖSNINGAR**
**ALGEBRA**
**2019-10-26**

**1.** Linjens ekvation blir: $y-3=\frac{3+3}{2-4}\cdot(x-2) \Leftrightarrow y=-3x+9.$

**2.** $\frac{x^3-2x^2}{x^3-4x}=\frac{x^2(x-2)}{x(x^2-4)}=\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x}{x+2}$

**3.** $2x^2-6x+1=2(x^2-3)+1=2\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+1=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{2}.$

**4.** $\lg\left(x^2y^3\right)-2\lg x+\lg\frac{1}{y}=\lg\left(x^2y^3\right)-\lg x^2+\lg\frac{1}{y}=\lg\frac{x^2y^3}{x^2y}=\lg y^2=2\lg y$

**5.** $\frac{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{6}}}{a^{\frac{5}{2}}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot a^0}{a}\right)^3=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}-\frac{5}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot\left(a^{\frac{3}{2}-1}\right)^3=a^{-2}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}=a^0=1$

**6.** $\cos 3x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 3x=\pm\frac{\pi}{4}+n2\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{n2\pi}{3}, n\in Z$

**7.** $|x-5|\geq 3 \Leftrightarrow x\leq 2$ eller $x\geq 8.$

**8.** $\frac{4+i}{2}-\frac{2-i}{1-i}=\frac{4+i}{2}-\frac{(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4+i}{2}-\frac{3+i}{2}=\frac{1}{2}$

**9.** $\tan\frac{16\pi}{3}=\tan\frac{15\pi+\pi}{3}=\tan(5\pi+\frac{\pi}{3})=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

**10.** $|z+2i|=4 \Leftrightarrow |z-(-2i)|=4$ är en cirkel med MP: $(0,-2)$ (alt. MP: $-2i$ ) och radien 4.

**11.** $\frac{x}{x+2}=\frac{2+x}{x}$, där $x\neq 0, x\neq -2$ (nämnarens nollställen) .

Vi får $x^2=(x+2)^2 \Leftrightarrow x^2=x^2+4x+4 \Leftrightarrow 4x+4=0 \Leftrightarrow x=-1.$

Svar: $x=-1$

**12.** Kvoten är $2x^2-3x+11$ och resten är $-38$.

**13.** $16^x - \frac{4^x}{64} = 0 \Leftrightarrow 4^{2x} - \frac{4^x}{4^3} = 0 \Leftrightarrow 4^{2x} = \frac{4^x}{4^3} \Leftrightarrow 4^{2x} = 4^{x-3} \Leftrightarrow 2x = x-3 \Leftrightarrow x = -3$.

**Alt.:** Sätt $4^x = t$ . Vi får $t^2 - \frac{t}{64} = 0 \Leftrightarrow t\left(t - \frac{1}{64}\right) = 0$ .

Detta ger att $t = 0$, d.v.s. $4^x = 0$ omöjligt, inga lösningar.

Eller $t = \frac{1}{64}$, d.v.s. $4^x = \frac{1}{64} \Leftrightarrow 4^x = 4^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

Svar: $x = -3$

**14.** $\ln\left(x^2 - 3x - 5\right) = \ln(7-2x)$ . Vi får $x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4, x = -3$

En kontroll ger att $x = 4$ är en falsk rot.

Svar: $x = -3$.

**15.** $x - 1 = \sqrt{2x+6}$ . Kvadrering ger $(x-1)^2 = 2x+6 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5, x = -1$

En kontroll ger att bara $x = 5$ är en lösning.

Svar: $x = 5$.

**16.** $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ . Gissning ger roten $x = 1$.

Polynomdivision med $x - 1$ ger ekvationen

$(x-1)(x^2+4) = 0$ . Då har vi att

$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm 2i$

Svar: Rötterna är $x = 1, \pm 2i$ .

**17.** $\sin 2x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos x \sin x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - \cos x) = 0$.

Vi får två ekvationer:

1) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$ .

2) $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in Z$

Svar: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ , $n \in Z$

**18.** $2x^2 - 12x + y^2 + 2y + 15 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = -15$

Kvadratkomplettering ger

$$2\left((x-3)^2 - 3^2\right) + (y+1)^2 - 1^2 = -15 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 - 18 + (y+1)^2 - 1 = -15 \Leftrightarrow$$

$$2(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{2(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Svar: En ellips med medelpunkten $(3, -1)$ och halvaxlarna $a = \sqrt{2}$ och $b = 2$ .

**19.** Ekvationen är $3z+(2-i)\bar{z}-1+3i=0$.
Med $z=x+iy$ och därmed $\bar{z}=x-iy$ får vi

$$3(x+iy)+(2-i)(x-iy)=1-3i \Leftrightarrow 3x+i3y+2x-i2y-ix+i^2y=1-3i$$

$$\Leftrightarrow 5x-y+i(y-x)=1-3i$$

Jämförelse av realdel och imaginärdel ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 5x-\ \ y=1 \\ -x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{7}{2} \end{cases}.$$

Svar: $z=x+iy=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2}i.$

**20.** $\dfrac{x^2-x-2}{3x}\geq 0$. Vi faktoriserar täljaren $\dfrac{(x-2)\cdot(x+1)}{3x}\geq 0$.

Sätt $f(x)=\dfrac{(x-2)\cdot(x+1)}{3x}$

**Teckenschema**

| $x$ | | -1 | | 0 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | - | 0 | + | | + | | + |
| $x-2$ | - | | - | | - | 0 | + |
| 3x | - | | - | 0 | + | | + |
| f(x) | - | 0 | + | ej def. | - | 0 | + |

Svar: $-1\leq x<0$ eller $x\geq 2$.