LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK
Helsingborg

SVAR OCH ANVISNINGAR
ALGEBRA
2019-08-23

1. $x^2 - 14x + 1 = (x-7)^2 - 48$.

2. $\dfrac{6x + 2x^2}{2x^3 - 18x} = ... = \dfrac{1}{x-3}$

3. $e^{2\ln 3 + \ln\frac{5}{9}} = e^{\ln 5} = 5$.

4. $x^2 - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$

5. $\sin\dfrac{17\pi}{4} = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\cdot 2\pi\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6. $6x + 2 < 3x - 7 \Leftrightarrow x < -3$.

7. $3\cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot \left(2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = 3\cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

8. $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + n2\pi, n \in Z$.

9. $\dfrac{2+i}{1-i} - \dfrac{1}{2i} = \dfrac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - \dfrac{1\cdot i}{2i\cdot i} = \dfrac{1+3i}{2} + \dfrac{i}{2} = \dfrac{1}{2} + 2i$.

10. $|z - 3i| = 4$ är en cirkel med MP: (0,3) och radien 4.

11. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 11 \Leftrightarrow 9(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) = 11$

Kvadratkomplettering ger

$$9(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 36 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{9(x+1)^2}{36} + \frac{4(y-2)^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

Svar: En ellips med medelpunkten $(-1, 2)$ och
halvaxlarna $a = 2$ och $b = 3$.

12. Kvoten är $2x^2 + 3x + 10$ och resten är 19.

13. $\cos^2 x + \sin x = 1 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 x + \sin x = 0$.

Sätt $\sin x = t$. Ekvationen blir $-t^2 + t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ eller $t = 1$

Vi får två ekvationer: 1) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi, n \in Z$ eller 2) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n2\pi, n \in Z$

14. $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$. Enligt trigonometriska ettan har vi

$\cos^2 v = 1 - \sin^2 v = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos v = \pm\frac{1}{3}$. Då får vi att $\tan v = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{1} = \pm 2\sqrt{2}$

15. $\lg(x-1) - \lg 3 = \lg 2 - \lg x \Leftrightarrow \lg(x-1) + \lg x = \lg 2 + \lg 3$.

Vi får $\lg(x-1)\cdot x = \lg 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = -2$.

En kontroll ger att $x = -2$ är en falsk rot.

Svar: $x = 3$.

16. $2\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + 4x - 4} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = \sqrt{x^2 + 4x - 4}$.

Kvadreringen ger $x^2 + 4x - 4 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vi får $x = 2$, $x = -2$ är en falsk rot.

17. $2\overline{z} - iz = 1 + 4i$.

Med $z = x + iy$ och därmed $\overline{z} = x - iy$ får vi

$2(x - iy) - i(x + iy) = 1 + 4i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + y + i(-x - 2y) = 1 + 4i$

Jämförelse av realdel och imaginärdel ger ekvationssystemet:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Svar: $z = x + iy = 2 - 3i$.

18. $2^{2x+1} - 14\cdot 2^x - 16 = 0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 \cdot 2 - 14\cdot 2^x - 16 = 0$. Sätt $2^x = t$, ekvationen blir

$t^2 - 7t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 8$ eller $t = -1$.

Vi får två ekvationer: 1) $2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3$. 2) $2^x = -1$ har inga lösningar.

Svar: $x = 3$.

19. $\frac{2x}{x-1} \geq x \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x - x^2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(3-x)}{x-1} \geq 0$. Teckenschema:

x		0		1		3	
x	-	0	+		+		+
$3-x$	+		+		+	0	-
$x-1$	-		-	0	+		+
f(x)	+	0	-	ej def.	+	0	-

Svar: $x \leq 0$ eller $1 < x \leq 3$.

20. Visa att $\dfrac{\sin 2x}{\sin x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}$

VL= $\dfrac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin x} - \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x} =$

$\dfrac{2\cos x}{1} - \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x} = \dfrac{2\cos x \cdot \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x} = .$

$\dfrac{2\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x} = \text{HL}$