LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA **SVAR OCH ANVISNINGAR**
MATEMATIK **ALGEBRA**
Helsingborg **2020-04-22**

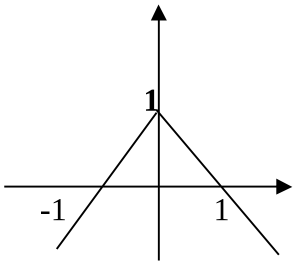
1. $x = 90$

2. 0

3. $x < 2$

4. $3(x-1)(x+\frac{1}{3}) = (3x+1)\cdot(x-1)$

5.



6. $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x}$.
.

7. $-1 \le x \le \dfrac{2}{3}$

8. 4.

9. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. Området utanför en cirkelskiva med medelpunkt i $2-6i$ och radie 2.

11. Polynomdivision ger

$$\frac{2x^3 - x^2 + 15x - 6}{x^2 + 2x + 1} = k(x) + \frac{r(x)}{x^2 + 2x + 1}.$$

Svar: $k(x) = 2x - 5 =$ kvoten och $r(x) = 23x - 1 =$ resten .

12. $(2-i)z = \dfrac{10-5i}{i+1} \Leftrightarrow z = \dfrac{10-5i}{(i+1)(2-i)} \Leftrightarrow z = \dfrac{5(2-i)}{(i+1)(2-i)} \Leftrightarrow z = \dfrac{5}{(i+1)} \Leftrightarrow z = \dfrac{5(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{5(1-i)}{2} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}i$

13. $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{3} = \pm\dfrac{2\pi}{3} + n2\pi,\ n \in Z$. Det blir två fall:

1) $2x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + n2\pi \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + n2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + n\pi$

2) $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+n2\pi \Leftrightarrow 2x=-\pi+n2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+n\pi$

Svar: $x=\frac{\pi}{6}+n\pi$ eller $x=-\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z$.

14. Vi bestämmer $\cos u$ med hjälp av trig.ettan:

$$\cos^2 u=1-\sin^2 u=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos u=\pm\frac{1}{2}.$$

Eftersom $\frac{\pi}{2}<u<\pi$ så får vi att $\cos u=-\frac{1}{2}$.

15. Med $z=x+iy$ och därmed $\bar{z}=x-iy$ får vi

$$2(x-iy)-(2+i)(x+iy)=5-23i \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y-4yi-xi=5-23i$$

Jämförelse av realdel och imaginärdel ger

$$\begin{cases} y=5 \\ -4y-x=-23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

Svar: $z=x+iy=3+5i.$

16. $4x^2-8x+9y^2+36y+4=0 \Leftrightarrow 4(x^2-2x)+9(y^2+4y)+4=0 \Leftrightarrow$

$$4((x-1)^2-1)+9((y+2)^2-2^2)+4=0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-1)^2}{36}+\frac{9(y+2)^2}{36}=1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

Svar: Ellips med centrum i $(1,-2)$ och halvaxlarna $a=3, b=2$

17. $\sin^2\frac{x}{2}+\cos x=\frac{1}{4}$. Använd $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

Vi får

$$\frac{1-\cos x}{2}+\cos x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x+\cos x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}.$$

Lösningen blir $x=\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi,\ n\in Z$.

18. $2-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-5}=0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-5}$ (1)

Kvadreringen ger

$(2-\sqrt{x-1})^2=(\sqrt{x-5})^2 \Leftrightarrow -4\sqrt{x-1}=-8 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x=5$

En kontroll i ekv. (1) ger att $x=5$ duger.

Svar: $x=5$.

19. $\lg\dfrac{x+1}{x-1}+2\lg(x-1)=0 \quad (1)$

$$\lg\frac{x+1}{x-1}+2\lg(x-1)=0 \Rightarrow \lg\frac{x+1}{x-1}+\lg(x-1)^2=0 \Leftrightarrow \lg\left(\frac{x+1}{x-1}\cdot(x-1)^2\right)=0$$

$$\lg(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow (x+1)(x-1)=1 \Leftrightarrow x^2-1=1 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

En kontroll i ekv. (1) ger att $x=-\sqrt{2}$ ska förkastas, $x-1<0$.
Roten $x=\sqrt{2}$ duger eftersom $x-1>0$ (glöm inte att $\sqrt{2}\approx 1{,}4$)
Svar: $x=\sqrt{2}$

20. Vänstra ledet = VL

$$=\left(\frac{\cos x}{\tan x}+\sin x\right)\cdot\sin 2x=\left(\frac{\cos x\cdot\cos x}{\sin x}+\sin x\right)\cdot\sin 2x=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x}\cdot\sin 2x$$

$$=\frac{1}{\sin x}\sin 2x=\frac{1}{\sin x}2\sin x\cos x=2\cos x = \text{HL}$$

SLUT!