LUNDS UNIVERSITET
Lunds Tekniska Högskola

M A T E M A T I K

som förberedelse
för LTH-studier

Kort förberedande kurs för teknologer i vardande

av

Rolf Pettersson och Roland Thapper

sammanställt av Bert Sjögren i nådens år 2016

Schema
för en fyradagarskurs

RT-AVDELNINGEN (de första 24 sidorna i häftet)

Allmän räknefärdighet

Uppgift 1-24	Dessa uppgifter bör räknas under **dag 1**

Ekvationer

Uppgift 25-32	Dessa uppgifter bör räknas under **dag 2**

Logaritmer

Uppgift 33 - 39	Dessa uppgifter bör även räknas under **dag 2**

Uppgift 40, 41	Dessa uppgifter bör räknas under **dag 3**

RP-AVDELNINGEN (de sista 14 sidorna i häftet)

s. 14:	25[3], 26[1]	Dessa uppgifter bör även räknas under **dag 3**
s. 16:	29, 30[1], 30[2], 30[3], 30[4], 30[5], 31[1], 31[2]	
s. 17:	45[1], 45[2], 46[1], 46[2]	
s. 18:	47[1], 47[2], 48[1], 48[2], 49[2], 49[3]	
s. 19:	53[2], 53[3], 54[2]	
s. 20:	55[2], 55[3], 56[2], 56[3]	

s. 28:	63[1], 64[1], 65[1], 66[1]	Dessa uppgifter bör räknas under **dag 4**
s. 30:	67[2], 68[1], 68[2]	
s. 32:	69[1], 69[2], 70[1], 70[2]	
s. 34:	71[1], 71[2], 71[3], 72[1], 72[2], 72[3], 72[4], 73[1], 75[1], 75[2]	

ALLMÄN RÄKNEFÄRDIGHET

En förutsättning för att kunna lösa uppgifterna nedan är en viss baskunskap om räknelagarna för de reella talen. Här följer därför en förteckning av vissa mer eller mindre självklara och (hoppas vi) välkända räknelagar.

$$-(a+b)=-a-b \quad , \quad -(a-b)=-a+b=b-a \quad , \quad (-a)\cdot(-b)=+ab=ab=ba=(-b)\cdot(-a)$$

$$a(b+c)=ab+ac \quad , \quad (b+c)a=ba+ca=ab+ac \quad , \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \quad , \quad \frac{(a/b)}{c}=\frac{a}{bc}$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, (a-b)^2=a^2-2ab+b^2, (a-b)(a+b)=a^2-b^2 \text{ (konjugatregeln)}$$

Observera att räknelagarna alltid fungerar åt båda hållen, t ex

$$\boxed{a(a+b)=ab+ac \quad \Leftrightarrow \quad ab+ac=a(a+b)}$$

Ekvivalenspilen ($\Leftrightarrow$) innebär att uttrycken på ömse sidor om pilen betyder samma sak. Blanda aldrig samman ekvivalenspilar och likhetstecken!

Observera att uppgifterna nödvändigtvis inte är uppställda i svårighetsordning, och ej heller alltid i logisk ordning. Uppgifterna är mer eller mindre arbetsamma. Det är precis det du behöver; uppgifter av alla slag som hjälper dig att få igång räknefärdigheten!

Nu börjar vi!

Beräkna (och förenkla så långt som möjligt)

1. *a*) $(-3)(-7)$ *b*) $(-3)-7$ *c*) $3(-7)$ *d*) $3-7$

2. *a*) $2-(3-4)$ *b*) $2-3-4$ *c*) $(2-3)-4$ *d*) $(2-3)(-4)$

3. *a*) $(-2)^3+(-1)^4-(-1)^2$ *b*) $(-1)^5-(-1)^7-(-1)^9$

4. *a*) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ *b*) $\frac{14}{9}-\left(\frac{2}{27}+\frac{1}{18}\right)$

5. *a*) $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$ *b*) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$

6. *a*) $\dfrac{7\cdot\frac{2}{3}}{8}$ *b*) $\dfrac{5\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}}{\frac{7}{8}}$ *c*) $\dfrac{2\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}\right)}{-\frac{8}{3}}$ *d*) $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{7}{8}\right)}{-\frac{1}{2}-\frac{7}{8}}$

7. *a*) $(a+b)(a-c)$ *b*) $(4+q)(4-q)$ *c*) $(2c+5d)^2$ *d*) $(7f-3g)^2$

8. Förenkla $a)\quad (p-1)^2+(p+1)^2-2p^2$ $\qquad b)\quad (p+q)(p-q)-(p-q)^2$

9. Bestäm koefficienten för x^2 och koefficienten för x då man multiplicerar ihop parenteserna

$a)\quad (x-1)(5x^2-4x-3)$ $\qquad b)\quad (1+x-x^2+x^3)(2-x-x^2+7x^3)$

10. Är $c-d$ en *faktor* i följande uttryck? Om ditt svar är ”ja”, ange den andra faktorn.

$a)\quad c(x+y)-d(x+y)$ $\qquad b)\quad (c-d)(2+x)-dy+cy$

11. Förenkla

$a)\quad \dfrac{3x+2}{5}-\dfrac{2x-1}{5}$ $\qquad b)\quad \dfrac{3x-4}{2x}-\dfrac{2x-3}{3x}$

$c)\quad \dfrac{4x-7y}{9y}-\left(\dfrac{5x+2y}{12y}-1\right)$

12. Förenkla

$a)\quad \dfrac{\frac{a^2b}{c}}{\frac{ab^2}{c^2}}$ L $\qquad b)\quad \dfrac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2}$ L $\qquad c)\quad \dfrac{a^3+ab^2}{a^3-ab^2}\cdot\dfrac{a^2-ab}{a^2+ab}$ L

$d)\quad \dfrac{12xy-9y^2}{16x^2+12xy}\cdot\dfrac{16x^2+9y^2+24xy}{16x^2-9y^2}$ L

13. Förenkla

$a)\quad \dfrac{30x^4y^7}{12xy^{10}}$ $\qquad b)\quad \dfrac{3a^3b^4+6ab^2}{3ab^2}$ $\qquad c)\quad \dfrac{10y^2z^3+5zy-15z^2y}{5yz}$

14. Förkorta (om möjligt)

$a)\quad \dfrac{a-b}{b-a}$ $\qquad b)\quad \dfrac{(a-b)^2}{b-a}$ $\qquad c)\quad \dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}$

15. Skriv som ett bråk (på så enkel form som möjligt)

$a)\quad \dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$ $\qquad b)\quad x+\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$ L

$c)\quad \dfrac{1}{1-2x}-\dfrac{2}{1+2x}+\dfrac{6x+2}{4x^2-1}$ L $\quad d)\quad \dfrac{1}{2x-2}-\dfrac{1}{2x}$

Här kommer ytterligare ett par användbara räkneregler. Försök förstå hur de är uppbyggda i stället för att lära dig utantill!

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$	$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$

Exempel: Visa att $x^5-y^5=(x-y)\cdot(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

Lösning: Multiplicera ihop parenteserna!

$$(x-y)\cdot(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=x\cdot x^4+x\cdot x^3y+x\cdot x^2y^2+x\cdot xy^3+x\cdot y^4-$$
$$-y\cdot x^4-y\cdot x^3y-y\cdot x^2y^2-y\cdot xy^3-y\cdot y^4=x^5-y^5 \text{ (efter förenkling)}$$

Exempel: Gör liknämnigt: $\frac{5}{24}+\frac{2}{18}-\frac{4}{27}+\frac{17}{108}$

Lösning: När vi har lite mer komplicerade nämnare kan följande tabell vara till hjälp.

Nämnare	***Förläng med***
$24=2\cdot2\cdot2\cdot3$	$3\cdot3=9$
$18=2\cdot3\cdot3$	$2\cdot2\cdot3=12$
$27=3\cdot3\cdot3$	$2\cdot2\cdot2=8$
$108=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3$	2
$mgn=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3=216$	

$$\frac{5}{24}+\frac{2}{18}-\frac{4}{27}+\frac{17}{108}=\frac{5\cdot9}{24\cdot9}+\frac{2\cdot12}{18\cdot12}-\frac{4\cdot8}{27\cdot8}+\frac{17\cdot2}{108\cdot2}=\frac{45+24-32+34}{216}=\underline{\underline{\frac{71}{216}}}$$

16. Utveckla kvadraterna
$a)$ $(x+3y)^2$ $b)$ $(5-2x)^2$ $c)$ $(x^2-4y^3)^2$

17. Utveckla
$a)$ $(a+b+c)^2$ $b)$ $(p-2q+w)^2$

18. Förenkla
$a)$ $(x-2)(x+2)$ $b)$ $(3a^2+2x)(3a^2-2x)$

19. Utveckla
$a)$ $(x+2y)^3$ $b)$ $(a-5b^2)^3$

20. Uppdela i faktorer
$a)$ x^2-9 $b)$ x^2+4x+4 $c)$ $3x^2-18xy+27y^2$
$d)$ $4b^2-16a^2$ $e)$ x^6-81x^2 $f)$ x^3-8

21. Förenkla (utan räknare!)
$a)$ $\frac{5}{81}-\frac{13}{27}+\frac{7}{8}-\frac{7}{36}+\frac{1}{24}-\frac{5}{108}$ $b)$ $\frac{a^4-9b^2}{3ab-a^3}$
$c)$ $\frac{1-y}{x^2}-1+\frac{1}{xy}-\frac{1-y}{y}+\frac{(x+y)^2}{x^2y}$ $d)$ $\frac{7}{40}+\frac{8}{15}-\frac{11}{27}-\frac{5}{36}$ **L**
$e)$ $\frac{3}{14}-\frac{3}{22}+\frac{5}{8}-\frac{1}{154}$ **L**

22. Utnyttja konjugatregeln för att förenkla följande uttryck, så att de får ett heltal i nämnaren.

$a)\ \dfrac{1}{2-\sqrt{2}}$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **L**

23. Förenkla så långt som möjligt uttrycket

$a)\ \dfrac{2+a}{a}-\dfrac{a^2-1}{a^2}+4\cdot\dfrac{a+2}{3}$

Beräkna ovanstående uttrycks värde om

$b)\ a=-\dfrac{1}{2}$

24. Förenkla

$a)\ \dfrac{16}{x^2-4}+\dfrac{x+6}{x+2}$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{x+2}{x^2}-\dfrac{4x^2+2x-1}{x^3}$

$c)\ \dfrac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}+\dfrac{b^2}{a-b}$ **L** $\qquad$ $d)\ \dfrac{\frac{3}{5a}-\frac{a}{15}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{3}}$ **L**

EKVATIONER

Teori och exempel

Förstagradsekvationen

Att lösa en *förstagradsekvation* bygger på de kunskaper om allmän räknefärdighet du repeterade i kapitel 1 samt på full förståelse för hur du använder ekvivalenspilen (⇔) och likhetstecknet!

$$\boxed{ax=b \Leftrightarrow x=\frac{b}{a}}$$

Exempel Lös ekvationen $\dfrac{5x}{8}-\dfrac{4}{3}=1+7(3+2x)$

<u>Lösning</u>: $\dfrac{5x}{8}-\dfrac{4}{3}=1+7(3+2x) \Leftrightarrow \dfrac{5}{8}x-\dfrac{4}{3}=22+14x \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{5}{8}-14\right)x=22+\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{5-112}{8}x=\frac{70}{3} \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=-\frac{560}{321}}}$$

Kvadratkomplettering

Du kan lära dig formeln eller tekniken – se lösningen på nästa exempel!

$$\boxed{x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}$$

Exempel Kvadratkomplettera x^2+6x+7

<u>Lösning</u>:

$$x^2+6x+7=x^2+2\cdot 3\cdot x+7=x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+7=$$

$$=(x+3)^2-9+7=(x+3)^2-2$$

Exempel Kvadratkomplettera $2x^2+16x-2$

<u>Lösning</u>: $2x^2+16x-2=$

$$2(x^2+8x-1)=2(x^2+2\cdot 4\cdot x+4^2-4^2-1)=$$

$$=2((x+4)^{2.}-16-1)=2(x+4)^2-34$$

Andragradsekvationer

Formeln för att lösa *andragradsekvationer* får du fram med hjälp av kvadratkomplettering. Men det är smartast att lära sig lösningsformeln utantill!

$$x^2+px+q=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0\Leftrightarrow$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q\Leftrightarrow x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

dvs

$$\boxed{x^2+px+q=0\Leftrightarrow x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}$$

Exempel: Lös ekvationen $7x^2-21x+4=0$

Lösning: $7x^2-21x+4=0\Leftrightarrow x^2-3x+\frac{4}{7}=0\Leftrightarrow$

$$x=-\left(-\frac{3}{2}\right)\pm\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{4}{7}}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{4}{7}}\Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{47}{28}}}}$$

Eftersom vi inte använder räknare i den grundläggande matematiken på Lunds Tekniska Högskola är detta svar OK. Vi behöver sällan närmevärden.

Övningar

En liten påminnelse är på sin plats. Vi söker enbart ekvationernas reella lösningar!

Kom ihåg att *inte* använda räknare. Du behöver även träning på huvudräkning (eller räkning med papper och penna vid behov).

Förstagradsekvationer

25. Lös ut h ur följande formler
(En formel innehåller ett likhetstecken och är alltså en ekvation)
En extra guldstjärna till dig om du listar ut vilka geometriska samband formlerna beskriver!

a) $A = bh$ b) $M = 2\pi rh$

c) $A = \dfrac{h(a+b)}{2}$ d) $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Lös följande ekvationer av första graden

26. a) $\dfrac{x}{3} = 7$ b) $\dfrac{3}{x} = 7$

c) $14x - 5 = 3 - 4x$ d) $3(x+4) = 2(6-x)$

e) $\dfrac{1-4x}{3} = 3 + 2x$ f) $\dfrac{x}{5} - 2 = 7 - \dfrac{x}{8}$

Kvadratkomplettera

27. a) $x^2 - x - 3$ b) $3x^2 - 12x + 5$

c) $x^2 + (3+2p)x + 1 + 7q$ L

Andragradsekvationer

28. Lös följande ekvationer

a) $6x + 27 = x^2$ b) $x^2 - x - 1 = 0$

c) $x^2 - 180 = 3x$

Andra ekvationstyper

- Först några *ekvationer med x i nämnaren*. Det är ju inte konstigare än att det står ett tal i nämnaren. Du bildar minsta gemensamma nämnaren och förlänger ekvationens båda led med den! Du måste ibland fundera över vad som händer om nämnaren blir noll…

Exempel: Lös ekvationen $\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)}=\frac{3}{(x^2-1)}$

<u>Lösning</u>: Multiplicera med mgn: $mgn = x(x-1)(x+1) = x(x^2-1)$

Notera att detta inte kan göras med "full ekvivalens". Det är i detta fall inte tillåtet att multiplicera med mgn om *x* antar något av värdena 0, 1 eller -1. Skulle någon av dessa *x*-värden dyka upp i lösningen till ekvationen måste du pröva rötterna, då du sannolikt fått en falsk rot.

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)}=\frac{3}{(x^2-1)} \Rightarrow x(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)}\right)=x(x^2-1)\cdot\frac{3}{(x^2-1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x(x^2-1)}{x}+\frac{2x(x+1)(x-1)}{(x-1)}=\frac{3x(x^2-1)}{(x^2-1)} \Leftrightarrow (x^2-1)+2x(x+1)=3x$$

$$\Leftrightarrow x^2-1+2x^2+2x=3x \Leftrightarrow 3x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1\cdot 12}{3\cdot 12}} \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}}}$$

- Sen tar vi några *ekvationer som kan lösas med hjälp av faktorisering.*

En allmän metod att lösa ekvationer är att samla samtliga termer på ena sidan likhetstecknet, förslagsvis till vänster. Sedan studerar du uttrycket till vänster. Ibland kan det delas upp i faktorer på ett mer eller mindre enkelt sätt (glöm inte konjugatregeln, den är bra att ha!) och då har du lösningarna till ekvationen som i en liten ask.

Följande gäller allmänt: (p(x) och q(x) är polynom):

Om $p(x)=(x-a)q(x)=0$ är $x=a$ en lösning (rot) till ekvationen $p(x)=0$

Exempel: Lös ekvationen $x^4=4x^2$

<u>Lösning</u>: Samla termerna t v $x^4-4x^2=0$

Nu kan faktorn x^2 brytas ut. Därefter ger konjugatregeln följande:

$$x^2(x-2)(x+2)=0$$

Svaret kan nu skrivas direkt $\underline{\underline{x_1=x_2=0;\ x_3=2;\ x_4=-2}}$

- För att lösa en *rotekvation* måste du "fixa bort" roten. Genom att kvadrera båda leden försvinner rottecknet. Men när du kvadrerar de båda leden i en ekvation gäller inte $\Leftrightarrow$ utan tecknet $\Rightarrow$ vilket innebär att rötterna alltid måste prövas!

Exempel: Lös ekvationen $\sqrt{2x+3} = x$

<u>Lösning</u>: $\sqrt{2x+3} = x \quad \Rightarrow \quad 2x+3 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \Leftrightarrow \quad x_1 = 3 \;\; ; \;\; x_2 = -1$$

Nu måste vi pröva de erhållna rötterna!

x = 3 ger VL = $\sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$ och HL = 3

x = -1 ger VL = $\sqrt{2 \cdot (-1) + 3} = \sqrt{1} = 1$ och HL = -1

Vi ser att endast x = 3 är lösning till ekvationen.

Svar: x = 3

Flera övningar på ekvationer

Andragradsekvationer

29. Lös följande ekvationer

a) $1 + 9x^2 = 12x$ b) $(x+2)(x-1) - 3x - 7 = 0$

c) $(x-1)(x-3) = 3$ d) $(x-1)(x-2) + (x-3)(x-4) = 10$

e) $x(x-8) - (x-4)^2 = 0$ f) $x^2 = 2x^2$

Ekvationer med *x* i nämnaren

30. Lös följande ekvationer

a) $\frac{2}{x} = \frac{x}{18}$ b) $\frac{2}{x} = \frac{18}{x}$

c) $x + \frac{2x}{x-1} - \frac{3-x}{x-1} = 0$ **L** d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x+2}$

Ekvationer som kan lösas med hjälp av faktorisering

31. Lös följande ekvationer med hjälp av faktorisering.

a) $x^2 = 4x$ b) $(x+2)(x+3) - 6 = 0$

c) $x^3 = 49x$ d) $x^3 - 9x^5 = 0$

e) $x^3 - 12x^2 + 36x = 0$ f) $x^2(x+3) = 4x$

Rotekvationer

32. Lös följande ekvationer

a) $\sqrt{1-x} = 1 + x$ b) $x + \sqrt{1-x} = -1$ L

LOGARITMER

Definitioner och formler

Definition

a är ett *positivt* reellt tal skilt från 1.
För varje *positivt* reellt tal *y* finns ett reellt tal *x* sådant att $a^x = y$
Talet *x* kallas *a-logaritmen för y* och betecknas $\log_a y$

Notera att *ingenting* är sagt om talet *x*. Det kan således vara ett positivt eller negativt reellt tal eller eventuellt 0.

Det står också att det bara finns ***ett*** reellt tal *x*. Detta betyder att definitionen är entydig.

Det står ***inte*** att $a > 1$. Du kommer kanske ihåg att exponentialfunktionen är strängt växande om $a > 1$. Då är även motsvarande logaritmfunktion strängt växande. Om $0 < a < 1$ var exponentialfunktionen strängt avtagande. Då är även motsvarande logaritmfunktion strängt avtagande.

Vi kan skriva definitionen med hjälp av ekvivalenspil på följande sätt:

$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = {}^a\log y$

Om *x* elimineras i denna definition får vi ett samband, som ibland kallas att skriva om *y* på *a*-bas. Detta är en alternativ formulering av definitionen.
På motsvarande sätt kan *y* elimineras.

$y = a^{{}^a\log y}$	$x = {}^a\log\left(a^x\right)$

Två generella viktiga specialfall som följer direkt av definitionen. Jämför motsvarande formler för potenser!

${}^a\log 1 = 0$	${}^a\log a = 1$

Logaritmer med basen 10 och med basen e

Vi kommer nästan uteslutande i detta kapitel att ägna oss åt logaritmer med basen 10 eller basen e. Dessa två sorters logaritmer är de vanligaste.

Logaritmer med basen 10 kallas 10-logaritmer och betecknas $\lg y$.

Logaritmer med basen e kallas naturliga logaritmer och betecknas $\ln y$.

$y = 10^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \lg y$	$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$

$y = 10^{\lg y}$	$x = \lg\left(10^x\right)$	$y = e^{\ln y}$	$x = \ln\left(e^x\right)$
lg 1 = 0	lg 10 = 1	ln 1 = 0	ln e = 1

Av definitionerna får vi direkt möjlighet att beräkna:

Exempel 1 $\lg 1\,000\,000 = \lg\left(10^6\right) = 6$

Exempel 2 $\lg \sqrt{10} = \lg\left(10^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

Exempel 3 $\ln \frac{1}{e} = \ln\left(e^{-1}\right) = -1$

Exempel 4 $\lg 0{,}01 = \lg\left(10^{-2}\right) = -2$

Räknelagarna

Genom att utnyttja potenslagarna kan vi visa följande räknelagar för logaritmer:
(x och y är positiva reella tal.)

1	$\lg xy = \lg x + \lg y$	$\ln xy = \ln x + \ln y$
2	$\lg \frac{x}{y} = \lg x - \lg y$	$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
3	$\lg x^s = s \cdot \lg x$	$\ln x^s = s \cdot \ln x$

Några exempel:

Exempel 5 $\lg 5 + \lg 2 = \lg 10$

Exempel 6 $\lg 1035{,}9 = \lg\left(1{,}0359 \cdot 1000\right) =$
$\lg 1{,}0359 + \lg 1000 = 3 + \lg 1{,}0359$

Exempel 7 $\ln 144 - \ln 12 = \ln 12$

Exempel 8 $\lg \frac{1}{64} = \lg 1 - \lg 64 = -\lg\left(2^6\right) =$
$= -6 \lg 2$

Formeln för basbyte

${}^a\log x = \frac{{}^b\log x}{{}^b\log a}$	speciellt:	$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$	samt	$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e}$

Några övningar och exempel:

Exempel 9 Visa att $\ln 10 \cdot \lg e = 1$

<u>Lösn</u> Kombinera de 2 sista ekvationerna ovan eller skriv direkt om ln 10.

Exempel 10 Ange ln 8 i 10-logarimer <u>Lösn</u> $\ln 8 = \dfrac{\lg 8}{\lg e}$

Vi utnyttjar ofta entydigheten hos logaritmerna med:

$$\boxed{{}^{a}\log x = {}^{a}\log y \quad \Leftrightarrow \quad x = y}$$

Notera att x och y måste vara positiva tal

.

Fler exempel

Exempel 11 Skriv $3 \ln x - 2 \ln (x + 2)$ som <u>en</u> logaritm.

<u>Lösn</u> Räknelagarna 3 och 2 ovan ger:

$$3 \ln x - 2 \ln(x + 2) = \ln x^3 - \ln(x + 2)^2 = \ln \frac{x^3}{(x + 2)^2}$$

Exempel 12 Lös ekvationen $\ln x = \lg x$

<u>Lösn</u> Använd basbyteslagen

$$\ln x = \lg x \quad \Leftrightarrow \quad \ln x - \lg x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lg x}{\lg e} - \lg x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lg x\left(\frac{1}{\lg e} - 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lg x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$$

Exempel 13 Lös ekvationen $5^{x-2} = 7^{1-x}$

<u>Lösn</u> 10-logaritmera: och använd logaritmlagarna $\lg\left(5^{x-2}\right) = \lg\left(7^{1-x}\right) \Leftrightarrow (x - 2)\lg 5 = (1 - x)\lg 7 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lg 5 \cdot x - 2 \lg 5 = \lg 7 - \lg 7 \cdot x \Leftrightarrow$

Förenkla svaret med hjälp av log.lagarna. $\Leftrightarrow x = \dfrac{\lg 7 + 2 \lg 5}{\lg 5 + \lg 7} = \dfrac{\lg 7 + \lg 25}{\lg 35} = \underline{\underline{\dfrac{\lg 175}{\lg 35}}}$

Alt Byt till 10-bas! $5^{x-2} = 7^{1-x} \Leftrightarrow 10^{\lg 5 \cdot (x-2)} = 10^{\lg 7 \cdot (1-x)}$

Utnyttja att $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ etc som ovan.

Exempel 14 Lös ekvationen $3 \lg x = \lg 25$

<u>Lösn</u> Log-lagar + den sista formeln i avsn 4.1.3 ger $3 \lg x = \lg 25 \Leftrightarrow \lg x^3 = \lg 25 \Leftrightarrow x^3 = 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \sqrt[3]{25}}}$

Övningar

Logaritmlagarna

33. Bestäm

a) $\lg 1000$ b) $\lg 0{,}0001$ c) $\lg 0$

d) $\lg \sqrt{1000}$ L e) $10^{\lg e}$ f) $\lg 10^{e}$

34. Du vet att $\lg 2 \approx 0{,}3010$. Beräkna med hjälp härav (utan räknare!): (svara med 3 värdesiffror)

a) $\lg 20$ b) $\lg 4$ c) $\lg 5$ L

d) $\lg 800$ e) $\lg 0{,}25$ f) $\lg 102400$

35. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt (skriv som <u>en</u> logaritm)

a) $\lg 48 + \lg 42 - \lg 36$ b) $\lg 36 - \lg 6$

c) $\ln 36 - \ln 6$ d) $\dfrac{\ln 36}{\ln 6}$

36. Förenkla följande uttryck så långt som möjligt (skriv som <u>en</u> logaritm)

a) $\lg 2 + 1$ b) $1 - \lg 2$

c) $\lg 625 + \lg 64 - 2\lg 2$ d) $2\ln \dfrac{1}{e^2} - \ln \sqrt{e}$ L

e) $0{,}8\lg 10^{a} - \lg 10^{-0{,}2a}$ f) $2 - \lg 16$

g) ${}^{2}\log 2$ h) ${}^{2}\log 1024$

Logaritmekvationer

37. Lös följande ekvationer

a) $2\lg x = \lg 7$ L b) $2\lg x = 7$

c) $\lg(x+1) = 7$ d) $\lg 7x = 7$

38. Lös följande ekvationer

a) $\lg 2x = \lg 7 + 2\lg 5$ b) $\ln 6x = \ln 9 + 2\lg 10$

c) $-\ln 5 = \ln x$ d) $\lg 2x = 2\lg x$

39. Lös följande ekvationer. Svara exakt samt ange *vid behov* med hjälp av räknare ett närmevärde med 3 gällande siffror.

a) $5 + 6\lg 2x = 23$ b) $5 = \dfrac{7}{\lg(x+2)}$ L

c) $2\ln x + 2 = \ln x^4$ d) $\ln(\ln x) = 2$

Exponentialekvationer

40. Lös följande ekvationer. Svara exakt samt ange *vid behov* med hjälp av räknare ett närmevärde med 3 gällande siffror.

a) $3,2^{2x} = 4$ b) $5e^{x+2} = 3$ c) $7^{3x-2} = 4$

d) $4^x + 2^{2x} = 32$ L

.

41. Lös följande ekvationer. Svara exakt och förenkla så långt som möjligt

a) $5e^{x+2} = 3 \cdot 2^{x-2}$ L b) $e^{4x} = 2 \cdot 10^{x+1}$ L

c) $e^{2x} - e^{-2x} = 2$ L d) $2^{2x} = 2 \cdot 2^{x+1} - 3$ L

SVAR

Om det finns lösning till en uppgift markeras detta med L i svaren nedan! Lösningarna till dessa uppgifter hittar du längre bak i häftet.

1. $a)\ 21 \quad b)\ -10 \quad c)\ -21 \quad d)\ -4$

2. $a)\ 3 \quad b)\ -5 \quad c)\ -5 \quad d)\ 4$

3. $a)\ -8 \quad b)\ 1$

4. $a)\ \frac{17}{30} \quad b)\ \frac{77}{54}\ (=1\frac{23}{54}, \textit{undvik att skriva så, kan missförstås!})$

5. $a)\ \frac{1}{2} \quad b)\ 7$

6. $a)\ \frac{7}{12} \quad b)\ \frac{30}{7} \quad c)\ \frac{5}{2} \quad d)\ -\frac{7}{22}$

7. $a)\ a^2+ab-ac-bc \qquad b)\ 16-q^2$

   $c)\ 4c^2+25d^2+20cd \qquad d)\ 49f^2+9g^2-42fg$

8. $a)\ 2 \qquad b)\ -2q^2+2pq=2q(p-q)$

9. $a)\ -9\ \textit{resp.}\ 1$

   $b)\ -4\ \textit{resp.}\ 1 \quad (\textit{hela polynomet blir}\ 7x^6-8x^5+7x^4+9x^3-4x^2+x+2)$

10. $a)\ \textit{Ja}, x+y \quad b)\ \textit{Ja}, 2+x+y$

11. $a)\ \frac{x+3}{5} \quad b)\ \frac{5x-6}{6x} \quad c)\ \frac{x+2y}{36y}$

12. $a)\ \frac{ac}{b} \quad b)\ \frac{b-a}{b+a} \quad c)\ \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \quad d)\ \frac{3y}{4x}$ L (a,b,c,d)

13. $a)\ \frac{5x^3}{2y^3} \quad b)\ a^2b^2+2 \quad c)\ 2yz^2+1-3z$

14. $a)\ -1 \quad b)\ b-a \quad c)\ \frac{a}{a-b}$

15. $a)\ \frac{x^2+1}{x^2-1} \quad b)\ \frac{x^4+3x^2+2x}{x^3-1} \quad c)\ \frac{3}{4x^2-1}$ L (b,c)

    $d)\ \frac{1}{2x(x-1)}$

16. $a)\ x^2+6xy+9y^2 \quad b)\ 25-20x+4x^2 \quad c)\ x^4-8x^2y^3+16y^6$

17. $a)\ a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \quad b)\ p^2+4q^2+w^2-4pq+2pw-4qw$

18. $a)\ x^2-4 \quad b)\ 9a^4-4x^2$

19. $a)\ x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3 \quad b)\ a^3-15a^2b^2+75ab^4-125b^6$

20. $a)\ (x+3)(x-3) \quad b)\ (x+2)^2 \quad c)\ 3(x-3y)^2 \quad d)\ 2\cdot 2\cdot(b+2a)(b-2a)$

$e)\ x^2(x^2+9)(x+3)(x-3) \quad f)\ (x-2)(x^2+2x+4)$

21. $a)\ \frac{83}{324} \quad b)\ -\frac{a^2+3b}{a} \quad c)\ \frac{x+y+2xy}{x^2y} \quad d)\ \frac{35}{216} \quad e)\ \frac{39}{56}$ L (d,e)

22. $a)\ \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad b)\ \sqrt{18}-\sqrt{12}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ L (b)

23. $a)\ \frac{4a^3+8a^2+6a+3}{3a^2} \quad b)\ 2$

24. $a)\ \frac{x+2}{x-2} \quad b)\ \frac{1}{x^3} \quad c)\ -b \quad (=\frac{ab-b^2}{b-a}) \quad d)\ \frac{3+a}{5}$ L (c, d)

25. a) $h=\frac{A}{b}$ Rektangelns Area

b) $h=\frac{M}{2\pi r}$ Mantelarean hos en rät cirkulär cylinder

c) $h=\frac{2A}{a+b}$ Area parallelltrapets

d) $h=\frac{3V}{\pi r^2}$ Volymen hos en cirkulär kon

26. a) $x=21$ b) $x=\frac{3}{7}$ c) $x=\frac{4}{9}$

d) $x=0$ e) $x=-0{,}8=-\frac{4}{5}$ f) $x=\frac{360}{13}$

27. a) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$ b) $3(x-2)^2-7$

c) $\left(x+\frac{3}{2}+p\right)^2+7q-\frac{5}{4}-3p-p^2$ L

28. a) $x_1 = 9 \quad x_2 = -3$ b) $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

c) $x_1 = 15 \quad x_2 = -12$

29. a) $\frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$ b) $x = 1 \pm \sqrt{10}$

c) $x_1 = 0 \quad x_2 = 4$ d) $x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

e) Ekvationen är orimlig f) $x_1 = x_2 = 0$

30. a) $x = \pm 6$ b) Lösning saknas

c) $x = -3$ (x=1 falsk!) d) $x = \frac{1}{4}$ L (c)

31. a) $x_1 = 0 \quad x_2 = 4$ b) $x_1 = 0 \quad x_2 = -5$

c) $x_1 = 0 \; x_2 = 7 \; x_3 = -7$
Konjugatregeln! d) $x_{1-3} = 0 \quad x_4 = \frac{1}{3} \quad x_5 = -\frac{1}{3}$

Kommentar: Markera en dubbel- eller trippelrot i svaret!

e) $x_1 = 0 \quad x_{2-3} = 6$ f) $x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -4$

32. a) $x = 0$ b) $x = -3$ L Kommentar: Du kom väl ihåg att pröva rötterna?

33. a) 3 b) -4 c) Existerar ej

d) 1,5 L e) e f) e

34. a) 1 + lg 2 ≈ 1,30 b) 2·lg 2 ≈ 0,602 c) 1 – lg 2 ≈ 0,699 L

d) 2 + 3·lg 2 ≈ 2,90 e) – 2·lg 2 ≈ –0,602 f) 2 + 10·lg 2 ≈ 5,01

35. a) lg 56 b) lg 6 c) ln 6 d) 2

36. a) lg 20 b) lg 5 c) 4 d) – 4,5 L

e) a f) $\lg \frac{25}{4}$ g) 1 h) 10

37. a) $x = \sqrt{7}$ L b) $x = 10^{\frac{7}{2}} = 1\,000 \cdot \sqrt{10}$

c) $x = 10^7 - 1 = 9\,999\,999$ d) $x = \dfrac{10^7}{7}$

Notera att du alltid bör (och ofta måste) kontrollera att lösningarna fungerar i den ursprungliga ekvationen. Den ger begränsningar för den obekanta storheten, som dessutom kan ändras vid tillämpning av logaritmlagarna.

38. a) $x = \dfrac{175}{2}$ b) $x = \dfrac{3e^2}{2}$

c) $x = \dfrac{1}{5}$ d) $x = 2$ (0 ej lösning)

39. a) $x = 500$ b) $x = 10^{1,4} - 2 \approx 23,1$ L

c) $x = e$ d) $x = e^{e^2} \approx 1,62 \cdot 10^3$

40. a) $x = \left(\dfrac{\lg 4}{2 \lg 3,2}\right) = \dfrac{\lg 2}{\lg 3,2}$ b) $x = \ln \dfrac{3}{5} - 2$

c) $x = \dfrac{1}{3}\left(2 + \dfrac{\lg 4}{\lg 7}\right) = \dfrac{2}{3}\left(1 + \dfrac{\lg 2}{\lg 7}\right)$ d) $x = 2$ L

41. a) $x = \dfrac{\ln \frac{3}{20} - 2}{1 - \ln 2} = \dfrac{\ln \frac{3}{20e^2}}{\ln \frac{e}{2}}$ L b) $x = \dfrac{\lg 2 + 1}{4 \lg e - 1} = \dfrac{\lg 20}{\lg \frac{e^4}{10}}$ L

c) $x = \dfrac{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2}$ L d) $x_1 = 0$ $x_2 = {}^2\log 3 = \dfrac{\lg 3}{\lg 2}$ L

LÖSNINGAR TILL VISSA UPPGIFTER

12. a)

$$\frac{\frac{a^2b}{c}}{\frac{ab^2}{c^2}} = \frac{a^2b\cdot c^2}{c\cdot ab^2} = \underline{\underline{\frac{ac}{b}}}$$

Bråkdivision!

12. b)

$$\frac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2} = \frac{\frac{b\cdot b-a\cdot a}{ab}}{\frac{a\cdot a+b\cdot b+2\cdot ba}{ba}} = \frac{\left(b^2-a^2\right)\cdot ba}{ab\cdot\left(a^2+b^2+2ab\right)} =$$

mgn = *ab* i både nämnare och täljare

$$= \frac{(b-a)\cdot(b+a)}{(a+b)^2} = \underline{\underline{\frac{b-a}{a+b}}}$$

Konjugat- och kvadreringsreglerna!

12. c)

$$\frac{a^3+ab^2}{a^3-ab^2}\cdot\frac{a^2-ab}{a^2+ab} = \frac{a\left(a^2+b^2\right)\cdot a(a-b)}{a\left(a^2-b^2\right)\cdot a(a+b)} =$$

Bryt ut och faktorsuppdela!

$$= \frac{\left(a^2+b^2\right)(a-b)}{\left(a^2-b^2\right)(a+b)} = \frac{\left(a^2+b^2\right)(a-b)}{(a+b)(a-b)(a+b)} = \underline{\underline{\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}}$$

12. d)

$$\frac{12xy-9y^2}{16x^2+12xy}\cdot\frac{16x^2+9y^2+24xy}{16x^2-9y^2} =$$

Som c) men lite klurigare

$$= \frac{3y(4x-3y)\cdot(4x+3y)^2}{4x(4x+3y)\cdot(4x+3y)(4x-3y)} = \underline{\underline{\frac{3y}{4x}}}$$

15. b)

$$x+\frac{2}{x-1}+\frac{x+2}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)x+2\cdot\left(x^2+x+1\right)+(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)} =$$

mgn =
$(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right) =$
$= x^3-1$

$$= \frac{\left(x^3-1\right)\cdot x+2x^2+2x+2+x^2+2x-x-2}{\left(x^3-1\right)} =$$

Jämför lektion 3!

$$= \frac{x^4-x+3x^2+3x}{x^3-1} = \underline{\underline{\frac{x^4+3x^2+2x}{x^3-1}}}$$

15. c)

$$\frac{1}{1-2x}-\frac{2}{1+2x}+\frac{6x+2}{4x^2-1} = -\frac{1}{2x-1}-\frac{2}{2x+1}+\frac{6x+2}{4x^2-1} =$$

mgn =
$(2x+1)\cdot(2x-1) =$
$= 4x^2-1$

$$= \frac{-1\cdot(2x+1)-2\cdot(2x-1)+6x+2}{4x^2-1} =$$

$$=\frac{-2x-1-4x+2+6x+2}{4x^2-1}=\underline{\underline{\frac{3}{4x^2-1}}}$$

21. d)

$$\frac{7}{40}+\frac{8}{15}-\frac{11}{27}-\frac{5}{36}=\frac{27\cdot 7+72\cdot 8-11\cdot 40-30\cdot 5}{1080}=$$

$$=\frac{189+576-440-150}{1080}=\frac{39+136}{1080}=\frac{175}{1080}=\underline{\underline{\frac{35}{216}}}$$

$mgn =$

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5=$

$=1080$

Misströsta inte om du räknat fel på denna uppgift. Du är i gott (och stort) sällskap! Men jobba på tills det blir rätt, det är ofta viktig med exakthet!

21. e)

$$\frac{3}{14}-\frac{3}{22}+\frac{5}{8}-\frac{1}{154}=\frac{44\cdot 3-28\cdot 3+77\cdot 5-4\cdot 1}{616}=$$

$$=\frac{132-84+385-4}{616}=\frac{128+301}{616}=\frac{429}{616}=\underline{\underline{\frac{39}{56}}}$$

$mgn =$

$2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 11=216$

Hur finner man den sista förkortningen?
1) Du måste leta efter den! 2) Du vet att nämnaren innehåller faktorerna 2, 7 och 11. 3) Testa dom i tur och ordning. 4. Förkorta med 11.

22. b)

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{3-2}=\underline{\underline{\sqrt{18}-\sqrt{12}}}=$$

$$=\underline{\underline{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}}$$

24. c)

$$\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}+\frac{b^2}{a-b}=\frac{1}{\frac{b-a}{ab}}+\frac{b^2}{a-b}=\frac{ab}{b-a}+\frac{b^2}{a-b}=\frac{ab}{-(a-b)}+\frac{b^2}{a-b}=\frac{-ab+b^2}{a-b}=$$

$$=\frac{-b(a-b)}{a-b}=\underline{\underline{-b}}$$

24. d)

$$\frac{\frac{3}{5a}-\frac{a}{15}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3\cdot 3-a\cdot a}{15a}}{\frac{3-a}{3a}}=\frac{\frac{9-a^2}{15a}}{\frac{3-a}{3a}}=\frac{(3+a)(3-a)\cdot 3a}{15a\cdot(3-a)}=\underline{\underline{\frac{3+a}{5}}}$$

27. c)

$$x^2+(3+2p)x+1+7q \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2+2\cdot\frac{3+2p}{2}x+\left(\frac{3+2p}{2}\right)^2-\left(\frac{3+2p}{2}\right)^2+1+7q \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2+2\cdot\left(\frac{3}{2}+p\right)x+\left(\frac{3}{2}+p\right)^2-\left(\frac{9}{4}+p^2+3p\right)+1+7q \quad \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{\left(x+\frac{3}{2}+p\right)^2-\frac{5}{4}-p^2-3p+7q}}$$

30. c)

$$x+\frac{2x}{x-1}-\frac{3-x}{x-1}=0 \quad \Rightarrow x(x-1)+2x-(3-x)=0 \quad \Leftrightarrow$$

Mult. med $(x-1)$ tillåten om $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-x+2x-3+x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+2x-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1\pm\sqrt{1+3}$$

32. b) Dvs ekvationen tycks ha två rötter: $x=1 \quad och \quad x=-3$

Den första roten är enligt tidigare ej tillåten, varför endast $\underline{\underline{x=-3}}$ återstår.

33. d)

$$\lg\sqrt{1000}=\lg(1000)^{\frac{1}{2}}=\lg\left(10^3\right)^{\frac{1}{2}}=\lg 10^{\frac{3}{2}}=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

34. c)

$$\lg 5=\lg\frac{10}{2}=\lg 10-\lg 2=1-\lg 2\approx 1-0{,}3010=\underline{\underline{0{,}699}}$$

36. d) Pröva gärna flera vägar att lösa denna uppgift. Nedan finns 2 alternativ, den första bygger på att du använder följderna av definitionen av ln, i den andra börjar du med att göra om uttrycket till en logaritm…

1. $$2\ln\frac{1}{e^2}-\ln\sqrt{e}=2\ln e^{-2}-\ln e^{\frac{1}{2}}=2\cdot(-2)-\frac{1}{2}=\underline{\underline{-\frac{9}{2}}}$$

2. $$2\ln\frac{1}{e^2}-\ln\sqrt{e}=\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)^2-\ln e^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{1}{e^4}-\ln e^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{\frac{1}{e^4}}{e^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\ln\frac{1}{e^4\cdot e^{\frac{1}{2}}}=\ln e^{-4{,}5}=\underline{\underline{-4{,}5}}$$

Logaritmlagarna ställer till det för dig lite grand ibland, när du multiplicerar, dividerar eller kvadrerar uttryck innehållande obekanta storheter. Dessas definitionsområde kan ändras, vilket gör att du vid ekvationslösning får falska rötter. Enklast är att alltid pröva rötterna när du löser logaritmekvationer!

37. a) Genom att dividera med 2 undviker du falska rötter (som i alt 2). Du måste alltid utnyttja <u>entydigheten hos logaritmer.</u>

1. $$2\lg x=\lg 7 \Leftrightarrow \lg x=\frac{1}{2}\lg 7 \Leftrightarrow \lg x=\lg 7^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \underline{\underline{x=7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}}}$$

2. $2\lg x = \lg 7 \Rightarrow \lg x^2 = \lg 7 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$

Prövning av rötterna ger att den negativa roten är falsk. Då du använder 3:e logaritmlagen kan du inte utnyttja ekvivalenspilen, utan du får istället använda ”medför” - $\Rightarrow$

39. b) $5 = \dfrac{7}{\lg(x+2)} \Rightarrow \lg(x+2) = \dfrac{7}{5} \Leftrightarrow x + 2 = 10^{\frac{7}{5}} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10^{\frac{7}{5}} - 2}}$

HL i den ursprungliga ekvationen är definierad för $x > -2$ om $x \neq -1$, (då nämnaren blir 0). Multiplikationen med $\lg(x + 2)$ tillför talet -1 till definitionsmängden (därför ”medförpil”).
Ett närmevärde till svaret är 23,1, så vi behöver inte pröva mera.

40. d) Om x finns i exponenten på två termer är det nödvändigt att undersöka om dessa termer kan skrivas om på samma bas. 2 alt:

1. $4^x + 2^{2x} = 32 \Leftrightarrow \left(2^2\right)^x + 2^{2x} = 32 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x} = 32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} = 32 \Leftrightarrow 2^{2x} = 16 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

2. $4^x + 2^{2x} = 32 \Leftrightarrow 4^x + \left(2^2\right)^x = 32 \Leftrightarrow 2 \cdot 4^x = 32 \Leftrightarrow 4^x = 4^2$

Ofta är det enklast att logaritmera båda leden i ekvationen och sedan utnyttja logaritmlagarna.

41. a) $5e^{x+2} = 3 \cdot 2^{x-2} \Leftrightarrow \ln 5e^{x+2} = \ln 3 \cdot 2^{x-2} \Leftrightarrow$ eller tio-logaritmera!

$\Leftrightarrow \ln 5 + \ln\left(e^{x+2}\right) = \ln 3 + \ln\left(2^{x-2}\right) \Leftrightarrow$ logaritmlagarna

$\Leftrightarrow \ln 5 + (x+2) = \ln 3 + (x-2) \cdot \ln 2 \Leftrightarrow$ 3:e lagen

$\Leftrightarrow \ln 5 + 2 - \ln 3 + 2\ln 2 = x \cdot \ln 2 - x \Leftrightarrow$ lös ut x

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 5 + \ln e^2 + \ln 4 - \ln 3}{\ln 2 - \ln e} = \frac{\ln \frac{20e^2}{3}}{-\ln \frac{e}{2}} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\frac{\ln \frac{20e^2}{3}}{\ln \frac{e}{2}}}}$$

Minustecknet är valt för att markera svarets tecken.

$$\underline{\underline{x = \frac{2 + \ln 20 - \ln 3}{1 - \ln 2} = -\frac{\lg \frac{20e^2}{3}}{\lg \frac{e}{2}}}}$$ är två alternativa svar.

41. b) Om du väljer tiologaritmer eller naturliga logaritmer spelar i princip ingen roll; ibland är det ena något enklare. I denna uppgift kvittar det. Svaret kan dock ha många olika utformningar.

$$e^{4x} = 2 \cdot 10^{x+1} \Leftrightarrow 4x \lg e = \lg 2 + (x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\lg 2 + 1}{4 \lg e - 1}}} \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\lg 20}{\lg \frac{e^4}{10}}}}$$

$$e^{4x} = 2 \cdot 10^{x+1} \Leftrightarrow 4x = \ln 2 + (x+1) \ln 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2 + \ln 10}{4 - \ln 10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\ln 20}{4 - \ln 10}}}$$

41. c) Ibland är det smart om du gör en variabelsubstitution. I denna övning sätter du $e^{2x} = y$ och får en andragradsekvation.

$$e^{2x} - e^{-2x} = 2 \Leftrightarrow e^{2x} - \frac{1}{e^{2x}} = 2 \Leftrightarrow y - \frac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \pm \sqrt{1+1}$$

Den negativa roten förkastas, då e^{2x} måste vara positivt.

$$e^{2x} = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 2x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2}}}$$

Glöm inte att återgå till variabeln x !

41. d) Här siktar du på substitutionen $2^x = y$.

$$2^{2x} = 2 \cdot 2^{x+1} - 3 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2 \cdot 2^x \cdot 2^1 - 3 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 = 4 \cdot 2^x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$y_1 = 3 \quad y_2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 3 \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{\underline{\begin{cases} x = \frac{\lg 3}{\lg 2} = {}^2\log 3 \\ x = 0 \end{cases}}}$$

Rationella uttryck, Polynomdivision

Ett *rationellt uttryck* (i x) kan skrivas på formen $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, där $p(x)$ och $q(x)$ är polynom och $q(x) \neq 0$, dvs $q(x)$ ej identiskt noll. Om nu gradtalet för $p(x)$ är större än eller lika med gradtalet för $q(x)$, kan $p(x)$ divideras med $q(x)$, så att gradtalet för *restpolynomet* $r(x)$ blir mindre än gradtalet för $q(x)$. Man får $\boxed{\dfrac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}}$, där $k(x)$ kallas *kvotpolynom*. Polynomen $k(x)$ och $r(x)$ kan bestämmas med en *polynomdivisionsalgoritm* (se följande exempel)

Exempel Dividera $(3x^3 + x^2 + 4x - 3)/(x^2 - 3x + 1)$ så långt som möjligt.
Lösning: Skriv upp täljaren $p(x)$ och nämnaren $q(x)$ med "trappan" (eller "liggande stolen"):

$$
\begin{array}{rrl}
 & & 3x + 10 \quad (= k(x)) \\
(q(x) =) & x^2 - 3x + 1 & |3x^3 + x^2 + 4x - 3 \quad (= p(x)) \\
 & & -(3x^3 - 9x^2 + 3x) \\
 & & 10x^2 + x - 3 \\
 & & -(10x^2 - 30x + 10) \\
 & & 31x - 13 \quad (= r(x))
\end{array}
$$

Metod: Dividera högstagradstermen $3x^3$ i $p(x)$ med högstagradstermen x^2 i $q(x)$, dvs bilda $3x^3/x^2 = 3x$, som blir första termen i kvoten $k(x)$. Multiplicera sedan hela nämnaren $q(x)$ med $3x$ och subtrahera från $p(x)$. Fortsätt med att dividera högstagradstermen $10x^2$ i resten med högstagradstermen i $q(x)$, dvs bilda $10x^2/x^2 = 10$, som blir nästa term i $k(x)$. Multiplicera och subtrahera som ovan. Fortsätt tills gradtalet i restpolynomet $r(x)$ är strängt mindre än gradtalet för $q(x)$.
Svar:

$$\frac{3x^3 + x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x + 1} = 3x + 10 + \frac{31x - 13}{x^2 - 3x + 1}$$

Övningsuppgifter

Ö-25 Dividera så långt som möjligt:

~~[1] $(x^2 + x + 1)/(x - 1)$~~
~~[2] $(x^2 - 1)/(x^2 + 1)$~~
[3] $(x^3 - 5x + 1)/(x + 2)$

Ö-26 Dividera så långt som möjligt:

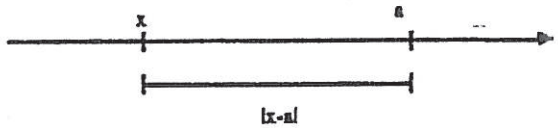
[1] $(6x^2 - 7x + 2)/(2x - 1)$
~~[2] $(1 - x^3)/(2x^2 + x - 1)$~~
~~[3] $(3x^5 + 2x^2 + 4)/(x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$~~

1.4 Absolutbelopp

DEFINITION

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{om} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{om} \quad x < 0 \end{cases}}$$

Alltså är $|x| \geq 0$ för alla x och om $|x| = a$ så är $x = \pm a$. Geometriskt kan $|x - a|$ uppfattas som avståndet mellan punkterna x och a på tallinjen.



Exempel Enligt definitionen är $|-2| = -(-2) = +2$, ty $x = -2 < 0$.

Exempel Exvationen $|x - 1| = 3$ kan skrivas $x - 1 = \pm 3$, varför rötterna är $x_1 = 1 + 3 = 4$, och $x_2 = 1 - 3 = -2$.

Exempel Olikheten $|x + 2| < 5$ kan även skrivas $-5 < x + 2 < 5$, dvs $-7 < x < 3$.

Studera tallinjen!

Övningsuppgifter

Ö-29 Bestäm
[1] $|5|$
[2] $|-5|$
[3] $|6 - 8|$
[4] $|2 - 3.5|$
[5] $|-6 - 8|$

Ö-30 Lös ekvationerna
[1] $|x - 1| = 2$
[2] $|x + 3| = 5.5$
[3] $|2 - x| = 2$
[4] $|x + 1| = 1/3$
[5] $|x + 2| = -2$
~~[6] $|3x - 5| = 1$~~

Ö-31 Angiv utan absolutbelopp de x, som satisfiera:
[1] $|x| < 4$
[2] $|x - 2| \leq 3$
~~[3] $|3x + 2| < 1$~~
~~[4] $1 < |x + 2| \leq 3$~~

Ö-32 Skriv $f(x)$ utan absolutbelopp, om $f(x)$ är:
~~[1] $x + |x|$~~
~~[2] $2x - |x|$~~
~~[3] $|x + 1| + |x - 2|$~~
~~[4] $4|3x - 1| + |6x + 3|$~~

1.5 Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Eftersom $x^2 = x \cdot x \geq 0$ för alla *reella* tal x har ekvationen $x^2 = b$ reella lösningar endast om $b \geq 0$.

DEFINITION

> Med $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal vars kvadrat är b. Alltså är $(\sqrt{b})^2 = b$ för $b \geq 0$.

Faktoruppdelning (av andragradspolynom)

Om ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har rötterna x_1 och x_2, så kan *polynomet* $x^2 + px + q$ faktoruppdelas:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

Anmärkning: Om $(p/2)^2 - q < 0$, så är x_1 och x_2 icke-reella och i så fall kan $x^2 + px + q$ ej faktoruppdelas med reella tal. (Därmot kan $x^2 + px + q$ alltid faktoruppdelas med *komplexa* tal.)

Exempel Faktoruppdela polynomet $P(x) = 2x^2 - x - 1$.

Lösning:

$2x^2 - x - 1 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$. Lös därför först ekvationen $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$. Man får

$$x_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

Rötterna är alltså $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1/2 \end{cases}$

Alltså är $x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x + \dfrac{1}{2})$, varför

$$P(x) = 2x^2 - x - 1 = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x + 1)$$

Övningsuppgifter

Ö-45 Faktoruppdela (med reella tal):

[1] $x^2 + 3x - 4$
[2] $6 - 2x - 4x^2$
~~[3] $x^2 + 2x + 2$~~
~~[4] $8x - 8x^2 - 2$~~
~~[5] $2x^2 - 6x + 1$~~

Ö-46 Angiv en andragradsekvation med rötterna:

[1] 1 och -2
[2] $2 + \sqrt{3}$ och $2 - \sqrt{3}$
~~[3] $1 + i$ och $1 - i$~~

1.8 Faktorsatsen. Ekvationer av större gradtal än två

Sats

Faktorsatsen

Om $p(x)$ är ett *polynom* i x och $p(x_1) = 0$, dvs om x_1 är en *rot* till polynomekvationen $p(x) = 0$, så är $(x - x_1)$ en *faktor* i $p(x)$, dvs

$$p(x) = (x - x_1) \cdot q(x)$$

där $q(x)$ är ett polynom av en enhet lägre grad än $p(x)$.

Exempel Lös ekvationen $x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = 0$.

Lösning:

Efter prövning (av t.ex. $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) finner man att $x_1 = -1$ är en rot, ty $-1 - 11 - 23 + 35 = 0$. Enligt faktorsatsen är alltså polynomet $x^3 - 11x^2 + 23x + 35$ delbart med $x - x_1 = x - (-1) = x + 1$. Division (av polynom, se 1.2) ger

$$x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = (x + 1)(x^2 - 12x + 35)$$

Tredjegradsekvaitonens övriga rötter fås ur ekvationen $x^2 - 12x + 35 = 0$. Man får alltså $x_{2,3} = 6 \pm \sqrt{36 - 35} = 6 \pm 1$, dvs $x_2 = 5$ och $x_3 = 7$.

Svar: Ekvationen har fötterna $x_1 = -1$, $x_2 = 5$ och $x_3 = 7$.

Tillägg: Vi har alltså faktoruppdelningen $x^3 - 11x^2 + 23x + 35 = (x + 1)(x - 5)(x - 7)$.

OBS! En tredjegradsekvation har alltid tre rötter (lika eller olika)

Övningsuppgifter

Ö-47 Lös ekvationerna

[1] $x^3 + 2x^2 - 8x = 0$
[2] $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$
~~[3] $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$~~
~~[4] $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$~~

Ö-48 Faktoruppdela (med reella tal):

[1] $x^3 + 2x^2 - 8x$
[2] $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$
~~[3] $x^3 + 4x^2 + 6x + 4$~~
~~[4] $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1$~~

Ö-49 Lös ekvationerna

~~[1] $(x - 1)^4 = 0$~~
[2] $x^4 - 1 = 0$
[3] $(x^2 - 1)^2 = 0$

Ö-50 Faktoruppdela

~~[1] $2(x^3 - x^2 + x - 1)$~~
~~[2] $2x^3 - 17x^2 + 41x - 30$~~
~~[3] $x^3 + x^2 - 6x - x^2y - xy + 6y$~~

1.10 n:te roten ur ett reellt tal. Allmänna potenser

Med $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$ menas den reella (och positiva, om $n = 2m =$ jämnt heltal) roten till ekvationen $x^n = b$. Alltså är $(b^{\frac{1}{n}})^n = b$, dvs $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

För den vanliga *kvadratroten* gäller alltså att $\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{1/2}$ för $b \geq 0$. Om $b > 0$ definieras *potensuttrycket* $b^{m/n}$ (med rationell exponent (m/n)) genom $b^{(m/n)} = \sqrt[n]{b^m}$. Man kan visa att $b^{(m/n)}$ satisfierar (de allmänna) potens- och exponentiallagarna:

Potens- och exponentiallagarna

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$
$$(b^x/b^y) = b^{x-y}$$
$$(b^x)^y = b^{x \cdot y}$$

$$\begin{cases} (ab)^x = a^x \cdot b^x \\ (a/b)^x = a^x/b^x \end{cases}$$

Anmärkning: Den andra lagen ger speciellt $1/b^y = b^{-y}$, om $x = 0$.

Exempel Förenkal $\sqrt[6]{2\sqrt{2}}$.
Lösning:

$$\sqrt[6]{2\sqrt{2}} = (2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

Ö-53 Förenkla

~~[1] $8^{1/6}$~~

[2] $4^{-1.5}$

[3] $(\sqrt{27})^{4/3}$

~~[4] $9^{-1/6} \cdot 9^{0.5}$~~

~~[5] $(32)^{-1.5}/4^{-4.5}$~~

Ö-54 Förenkla

~~[1] $\sqrt[4]{9}$~~

[2] $\sqrt[12]{8}$

~~[3] $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$~~

~~[4] $\sqrt[4]{\sqrt[7]{9}}$~~

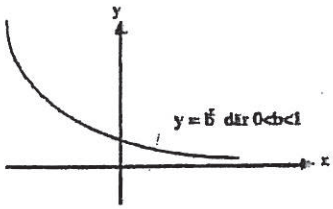
~~[5] $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{6}}}$~~

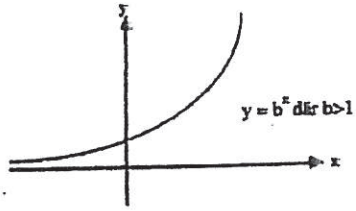
Man kan allmänt definiera *uttrycket* b^x för $b > 0$ och alla reella x, så att b^x satisfierar potenslagarna ovan. b^x kallas for en *potens* av b, där b kallas *bas* och x *exponent*. Av speciellt intresse är den (naturliga) exponentialfunktionen e^x med basen $e = 2,71828\ldots$. För allmänt b^x gäller bl.a. att

[1] $b^x > 0$ för alla x.

[2] $b^0 = 1$ för alla b.

[3] $f(x) = b^x$ är växande (för växande x) om $b > 1$, och avtagande (för växande x) om $0 < b < 1$.





OBS! Man skiljer på a) *potensfunktionen* $f(x) = x^b$ och b) *exponentialfunktionen* $f(x) = b^x$.

Exempel Lös ekvationen $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 21$.
Lösning:
Ekvationen $3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 21$ kan skrivas $3^x \cdot (1 + 2 \cdot 3) = 21$, dvs $3^x \cdot 7 = 21$ eller $3^x = 3$, varför $\boxed{x = 1}$.

Exempel Lös ekvationen $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.
Lösning:
Sätt $e^x = z$. Då erhålles andragradsekvationen $z^2 + 2z - 3 = 0$ med rötterna $z_1 = 1$ och $z_2 = -3$. Man får nu två fall:
[1] $e^x = z_1 = 1$ ger $x_1 = 0$.
[2] $e^x = z_2 = -3$ är en orimlighet, eftersom $e^x > 0$ för alla reella tal x.
Svar: $x = 0$

Övningsuppgifter

Ö-55 Bestäm reella lösningar till

~~[1] $3^x = 81$~~
[2] $3^{x+1} + 3^x = 36$
[3] $9^x = 1/27$
~~[4] $3 \cdot 2^{x+1} - 2^x = 40\sqrt{2}$~~
~~[5] $2^{x+2} + 3 \cdot 2^x = 3.5$~~

Ö-56 Bestäm reella lösningar till

~~[1] $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ (Sätt $e^x = z$)~~
[2] $e^{2x} + e^x + 1 = 0$
[3] $3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$
~~[4] $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$~~

Övningsuppgifter

Ö-61 Förenkla

[1] $\lg 80 - \lg 8$
[2] $\ln 48 + 6 \cdot \ln 1 - 3 \cdot \ln 2$
[3] $\lg 8 - 6 \cdot \lg \sqrt{2}$
[4] $\ln(1/9) + \ln \sqrt{27}$
[5] $2 \ln 24 + 3 \ln \frac{1}{4} + 5 \ln 9 - 4 \ln 27$
[6] $2\lg 0.12 - 1.5\lg 4 - \lg 1.8 + 10\lg 1$

Ö-62 Sök reella lösningar till ekvationerna

[1] $\ln x + 2 \cdot \ln 3 = \ln 5$
[2] $2\lg x + \lg 4 = 2$
[3] $3 \ln(x+1) - \ln x^3 = 6 \ln 4$
[4] $\ln(x-2) + \ln x = 3 \ln 2$
[5] $\ln(x+1) + \ln(2-x) = \ln(x-1)^2$
[6] $\lg(3x) + \lg(x+1) = 2\lg(x-1)$

2 Trigonometri

2.1 Vinkelmätning

Vinklar kan mätas i (delar av) varv, grader eller radianer. Med 1 radian menas storleken av centrumvinkeln i en cirkelsektor, där periferibågen är lika lång som cirkelns radie. (Rita en figur!)

Sambanden mellan de olika enheterna är: 1varv $= 360° = 2\pi$ radianer. Härav fås:

$1° = \pi/180$ radianer och 1 radian$= 180°/\pi \approx 57.3°$

(Ofta skriver man inte ut enheten radian, utan skriver t.ex. $90° = \pi/2$.)

Övningsuppgifter

Ö-63 Bestäm grader och radianer för

[1] $1/4$ varv
~~[2] 2/3 varv~~

Ö-64 Bestäm grader och radianer för

[1] $-1/2$ varv
~~[2] −5 varv (Rita figur!)~~

Ö-65 Omvandla till radianer

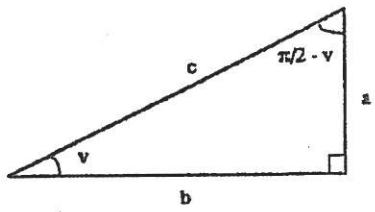
[1] $45°$
~~[2] 75°~~
~~[3] −60°~~
~~[4] 210°~~

Ö-66 Omvandla till grader

[1] $\pi/6$
~~[2] −π/8~~
~~[3] 23π/12~~
~~[4] −5π~~

2.2 Rätvinkliga trianglar

I en rätvinklig triangel är en vinkel $90° = \pi/2$ (radianer). Om en av de övriga vinklarna är v, blir den tredje vinkeln $\pi/2 - v$, eftersom vinkelsumman i en triangel är $180° = \pi$. Vinkeln $\pi/2 - v$ kallas *komplementvinkeln* till v. Den sida som står mot den räta vinklen kallas *hypotenusa* och de båda övriga sidorna kallas *kateter*.



För rätvinkliga trianglar gäller Pythagoras sats:

Sats

Pythagoras sats

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De trigonometriska funktionerna definieras (för $0 < v < \pi/2$):

DEFINITION

$\sin v = (a/c) =$ (motstånende katet)/(hypotenusa)
$\cos v = (b/c) =$ (närliggande katet)/(hypotenusa)
$\tan v = (a/b) =$ (motstående katet)/(närliggande katet)
$\cot v = (b/a) =$ (närliggande katet)/(motstående katet)

Härur fås:

$a = c \cdot \sin v, b = c \cdot \cos v$
$a = b \cdot \tan v, b = a \cdot \cot v$, samt att

$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{\cot v}$.

För komplementvinklen $(\pi/2 - v)$ gäller:
$\sin(\pi/2 - v) = \cos v, \cos(\pi/2 - v) = \sin v$
$\tan(\pi/2 - v) = \cot v, \cot(\pi/2 - v) = \tan v$

Man erhåller också:

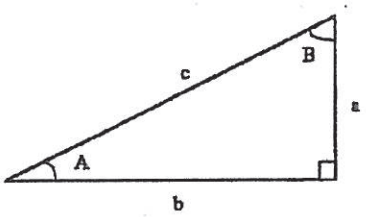
Sats

Trigonometriska ettan

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

(Fås direkt ur Pythagoras sats)

OBS! $\sin^2 v = (\sin v)^2 = \sin v \cdot \sin v$; $(\sin v)^2$ är ej lika med $\sin^2 v^2$.



Exempel

Solvera en rätvinklig traingel med $a = 3.0$ och $A = 25°$ (se figur), dvs. bestäm de sidor och vinklar som inte är givna.

Lösning:

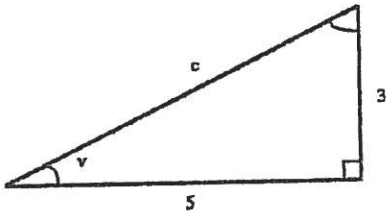
Vinklen $B = 90° - A = 65°$. Nu är $\sin A = a/c$, varför sidan

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{3.0}{\sin 25°} \approx \frac{3.0}{0.423} \approx 7.1$$

(sin 25° fås med räknedosa, räknesticka eller ur tabell.)

Vidare är $\tan A = a/b$, varför $b = a/\tan A \approx 3.0/0.466 \approx 6.4$

Svar: $B = 65°$, $c \approx 7.1$, och $b \approx 6.4$ (längdenheter).



Exempel

Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 3/5$ och $0 < v < \pi/2$.

Lösning:

Rita en rätvinklig triangel med kateterna $a = 3$ och $b = 5$. Då är $\tan v = 3/5$. Enligt Pythagoras' sats är hypotenusan då

$$c = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ varför } \sin v = \frac{3}{\sqrt{34}}, \cos v = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

Övningsuppgifter

Ö-67 Solvera följande rätvinkliga trianglar (beteckningar enligt figur ovan):

~~[1] $c = 3.6$ och $A = 40°$~~

[2] $a = 2.0$ och $b = 4.0$

~~[3] $a = 4.0$ och $B = 35°$~~

~~[4] $b = 3.5$ och $B = 30°$~~

~~[5] $b = 2.5$ och $c = 4.5$~~

~~[6] $b = 2.7$ och $A = 27°$~~

Ö-68 Bestäm (för $0 < v < \pi/2$) exakta värdet av:

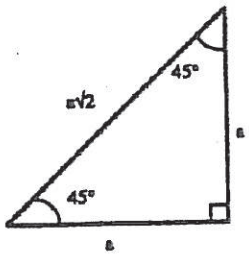
[1] $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 1/3$. (Ledning: Rita en rätvinklig triangel med $a = 1$ och $c = 3$)

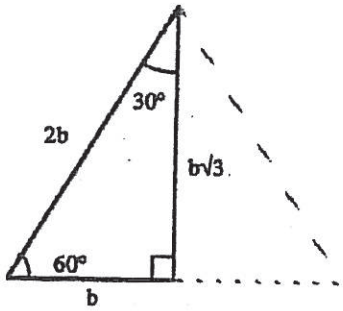
[2] $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 2/3$

~~[3] $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 5/2$~~

~~[4] $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = 0.3$~~

Vi härleder nu de trigonometriska funktionernas värden för 45°, 60° och 30°. (Om man inte kan dessa värden utantill, måste man snabbt kunna göra en härledning.)





För $v = 45° = \pi/4$ är den rätvinkliga triangeln (figur 1 ovan) en halv kvadrat. Då är kateterna a och $b = a$, samt hypotenusan $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$, varför:

$$\sin 45° = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos 45° = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan 45° = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$
$$\cot 45° = \cot\frac{\pi}{4} = 1$$

För $v = 60° = \pi/3$ kan den rätvinkliga triangeln uppfattas som en halv liksidig triangel (figur 2 ovan). (I en liksidig triangel är alla vinklarna lika med 60°, varför vinklarna i en halv liksidig triangel är 60°, 90° och 30°.) Alltså är hypotenusan $c = 2b$ och Pythagoras' sats ger $a = \sqrt{a^2 - b^2} = b\sqrt{3}$, varför:

$$\sin 60° = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60° = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$\tan 60° = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$
$$\cot 60° = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

För $v = 30° = \pi/6$ erhålles under betraktande av samma figur som för 60°:

$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30^\circ = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\cot 30^\circ = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

ty $\sin 30^\circ$=(motsående katet)/(hypotenusan)= $b/2b = 1/2$ osv.

Övningsuppgifter

Ö-69 Bestäm exakta värdet av

[1] $\cos 30^\circ + \tan 30^\circ$

[2] $(\cos 30^\circ - \sin 30^\circ)/(\cos 60^\circ + \sin 60^\circ)$

[3] $(\tan^2 60^\circ - \cos^2 30^\circ)/(\tan 45^\circ + \sin 30^\circ)$

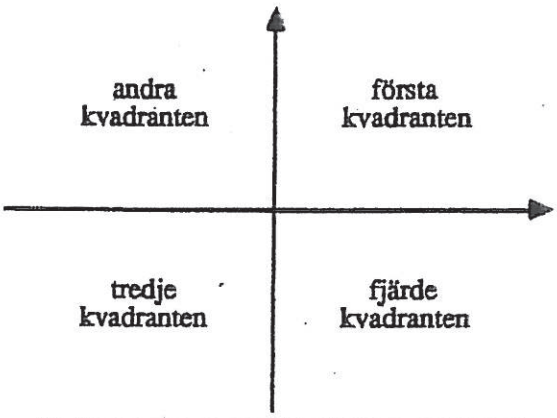
Ö-70 Förenkla

[1] $x^{\cos(\pi/6)} \cdot x^{\sin(\pi/3)}$
(Ledning: använd potenslagarna!)

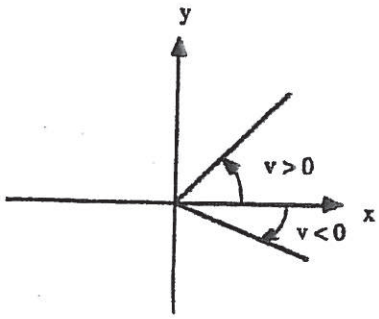
[2] $x^{\tan(\pi/4)} \cdot x^{-\cos(\pi/6)}$

[3] $x^{\sin(\pi/6)+\cos(\pi/3)}/x^{\tan(\pi/4)+\cot(\pi/4)}$

2.3 De trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar

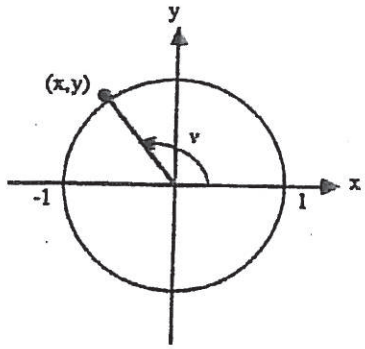


xy-planet är uppdelat i fyra kvadranter:



En vinkel räknas positiv om den mäts *moturs*, och negativ om den mäts *medurs*, vanligen räknat från positiva x-axeln.

Antag, att (x, y) är en punkt på enhetscirkeln, vars ekvation är $x^2 + y^2 = 1$. De trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar definieras genom:

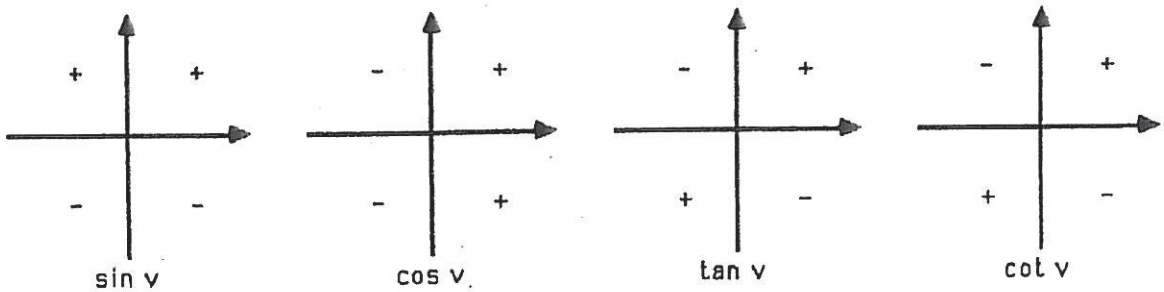


DEFINITION

$$\begin{cases} \sin v = y \\ \cos v = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan v = y/x & \text{för } x \neq 0, \quad (\text{dvs. } v \neq \pi/2 + n\pi) \\ \cos v = x/y & \text{för } y \neq 0, \quad (\text{dvs. } v \neq n\pi) \end{cases}$$

Vi ser att definitionerna stämmer överens med de tidigare givna för $0 < v < \pi/2$, dvs för $x > 0, y > 0$. (Rita figur!) Eftersom $\sin v = y$, är $\sin v$ positivt för vinklar i första och andra kvadraten och negativt i tredje och fjärde. Liknande regler för cos, tan, cot:



Av definitionerna ovan följer direkt att

Sats

[1] $\tan v = \sin v / \cos v = 1/\cot v$ och $\cot v = \cos v / \sin v = 1/\tan v$

[2] $-1 \leq \sin v \leq 1$ och $-1 \leq \cos v \leq 1$ {för *alla* vinklar v}

[3] $\sin 0 = 0, \sin \pi/2 = 1, \sin \pi = 0, \sin 3\pi/2 = -1, \sin 2\pi = 0$

[4] $\cos 0 = 1, \cos \pi/2 = 0, \cos \pi = -1, \cos 3\pi/2 = 0, \cos 2\pi = 1$

[5] $\sin v = \sin(v + n \cdot 2\pi)$ och $\cos v = \cos(v + n \cdot 2\pi)$, för varje heltal n.

[6] $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ [Trigonometriska ettan]

Exempel Bestäm exakt: $\cos(37\pi/6)$

Lösning:

$\cos(37\pi/6) = \cos(\pi/6 + 3 \cdot 2\pi) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

Exempel Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = -2$ och $\pi/2 < v < \pi$.

Lösning:

Med hälp av formeln $\cot v = \cos v / \sin v$ samt "triogometriska ettan" får man ekvationssystemet

$$\begin{cases} \cos v / \sin v = -2 \\ \cos^2 v + \sin^2 v = 1 \end{cases} \quad \text{med lösningar} \quad \begin{cases} \cos v = \pm 2/\sqrt{5} \\ \sin v = \mp 1/\sqrt{5} \end{cases}$$

Eftersom v ligger i andra kvadranten, där $\cos v < 0$ och $\sin v > 0$, fås.

Svar: $\cos v = -2/\sqrt{5}$ och $\sin v = 1/\sqrt{5}$.

Övningsuppgifter

Ö-71 I vilken kvadrant hamnar följande vinklar?

[1] $4\pi/3$
[2] $700°$
[3] $50\pi/3$
~~[4] $-17\pi/6$~~
~~[5] $-1000°$~~
~~[6] $100\pi/3$~~

Ö-72 Bestäm exakt

[1] $\cos 33\pi$
[2] $\sin(17\pi/2)$
[3] $\sin(33\pi/4)$
~~[4] $\cos(-23\pi/3)$~~
~~[5] $\tan(-39\pi/4)$~~
~~[6] $\cot(-101\pi/3)$~~

Ö-73 Visa att

[1] $1/\cos^2 v = 1 + \tan^2 v$
~~[2] $1/\sin^2 v = 1 + \cot^2 v$~~

Ö-74 Visa (för godtyckliga heltal n) att

~~[1] $\sin n\pi = 0$~~
~~[2] $\cos n\pi = (-1)^n$~~
~~[3] $\sin[(2n+1)\pi/2] = (-1)^n$~~
~~[4] $\cos[(2n+1)\pi/2] = 0$~~

Ö-75 Bestäm exakt

[1] $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 3/4$ och $3\pi/2 < v < 2\pi$
[2] $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 0.4$ och v är i andra kvadranten.
~~[3] $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 3$, och $\pi < v < 3\pi/2$~~
~~[4] $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 2/7$~~

Ö-76 Beräkna exakt

~~[1] $\sin v + \cos v$, om $\tan v = 4/3$ och $0 < 0 < \pi/2$~~
~~[2] $\sin v - \cos v$, om $\cot v = -3/4$ och $\pi/2 < v < \pi$~~
~~[3] $\tan v + \cot v$, om $\sin v = -9/\sqrt{145}$, och $3\pi/2 < v < 2\pi$~~

SVAR TILL RP-DELEN

25 [3] $x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x+2}$

26 [1] $3x - 2$

29 [1] 5 29 [2] 5 29 [3] 2 29 [4] 1.5 29 [5] 14

30 [1] $x_1 = 3$, $x_2 = -1$

30 [2] $x_1 = 2.5$, $x_2 = -8.5$

30 [3] $x_1 = 4$, $x_2 = 0$

30 [4] $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{4}{3}$

30 [5] saknar lösning

31 [1] $-4 \le x \le 4$

31 [2] -1

45 [1] $(x-1)(x+4)$

45 [2] $-4(x-1)(x+\frac{3}{2})$

46 [1] $x^2 + x - 2 = 0$

46 [2] $x^2 - 4x + 1 = 0$

47 [1] $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -4$

47 [2] $x_1 = 1, x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

48 [1] $x(x-2)(x+4)$

48 [2] $(x-1)(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2})(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2})$

49 [2] $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i$

49 [3] $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = -1$

53 [2] $\frac{1}{8}$

53 [3] 9

54 [2] $2^{1/4} = \sqrt[4]{2}$

55 [2] $x = 2$

55 [3] $x = -1.5$

56 [2] *saknar reell lösning*

56 [3] $x = 2$

63 [1] $90° = \frac{\pi}{2}$ *(radianer)*

64 [1] $-180° = -\pi$

65 [1] $\frac{\pi}{4}$

66 [1] $30°$

67 [2] $A \approx 26.6°$, $B \approx 63.4°$, $c \approx 4.5$

68 [1] $\cos v = \frac{\sqrt{8}}{3}$, $\tan v = \frac{1}{\sqrt{8}}$

68 [2] $\sin v = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan v = \frac{\sqrt{5}}{2}$

69 [1] $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

69 [2] $2 - \sqrt{3}$

70 [1] $x^{\sqrt{3}}$

70 [2] $x^{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$

71 [1] tredje

71 [2] fjärde

71 [3] andra

72 [1] -1

72 [2] 1

72 [3] $\frac{1}{\sqrt{2}}$

72 [4] $\frac{1}{2}$

75 [1] $\sin v = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan v = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

75 [2] $\cos v = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan v = -\frac{2}{\sqrt{21}}$