

## Material, form och kraft, F2

- Repetition
- Genomgång av ForcePAD uppgift 1
- Spänning
- Töjning
- Huvudspänning
- Styvhet



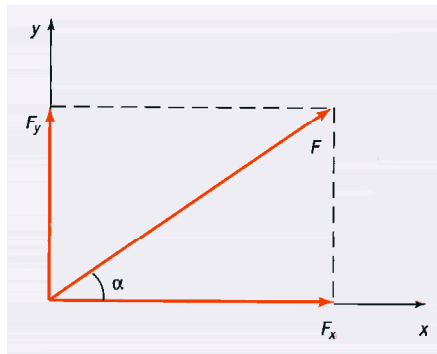
## Krafter

- **Krafter**
  - Vektorstorhet: storlek, riktning, angreppspunkt
  - Kontaktkraft, kraft som verkar på avstånd
  - Volymkraft, ytkraft, linjekraft, punktkraft
  - Yttre kraft, inre kraft



## Uppdelning av kraft i komponenter

- Uppdelning av krafter i komponenter



$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \sin \alpha$$



## Friläggnig

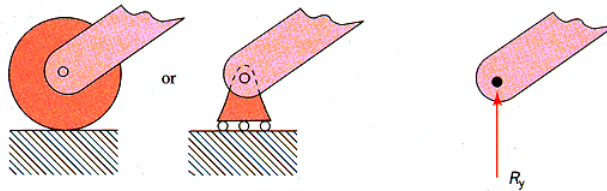
- **Friläggnig**
  - Rita tydliga figurer
  - Avgränsa kroppen
  - Rita in yttre krafter
    - Pålagda laster (kända)
    - Egentyngd
    - Upplagskrafter (okända)



# Upplag

Type of support

Equivalent force system



(c) Roller support

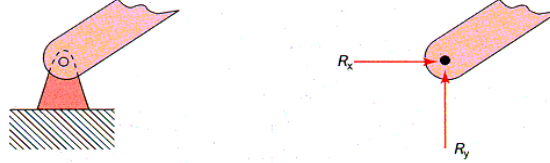
## Rullager



# Upplag

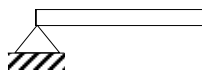
Type of support

Equivalent force system

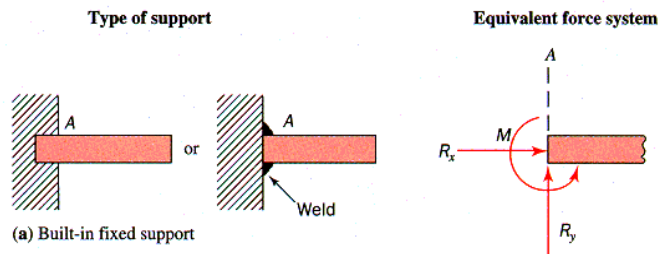


(b) Pin connection

## Fixlager



# Upplag



# Jämvikt

- **Jämviktsekvationer**
  - För plana problem (2D) finns tre ekvationer

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & \sum M_z &= 0 \\ \sum F_y &= 0\end{aligned}$$



# Jämvikt

- Jämvikt
  - För 3D finns sex ekvationer

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

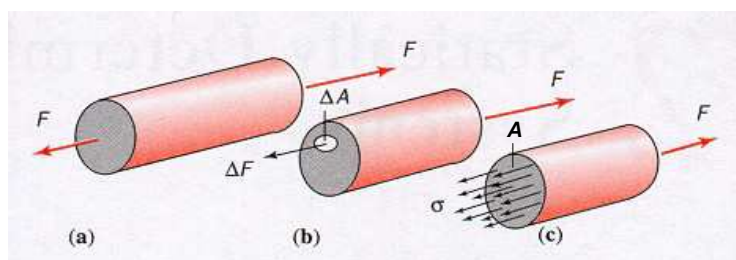
$$\sum M_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_z = 0$$



# Normalspänning



Dragen  
stång:

kraft  $F$

Snitt och  
friläggning:

$$\sum \Delta F = F$$

$$\sum \Delta A = A$$

Spänning: kraft  
per areaenhet

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$



## Normalspänning

- Allmänt:

$$F = \sum \sigma \Delta A \quad \text{eller} \quad \int_A \sigma dA$$

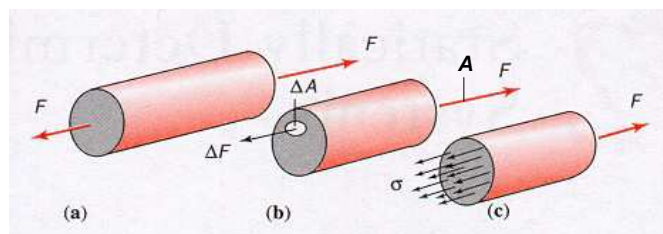
- Vid konstant spänning:

$$F = \sigma \sum \Delta A \quad \text{eller} \quad \sigma \cdot A \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A}$$



## Normalspänning

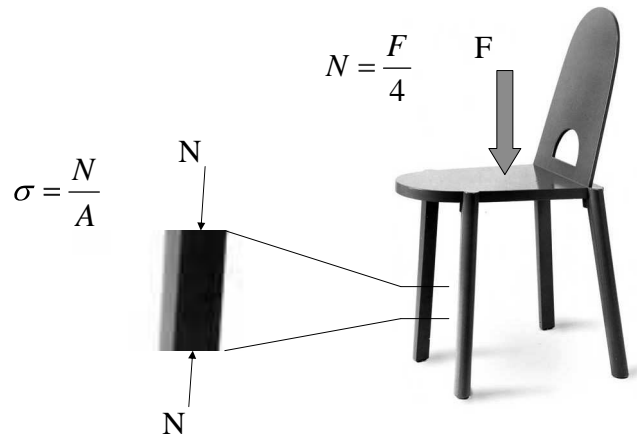
- Medelspänning, kraft per areaenhet:
  - Enhet:  $1\text{N/m}^2 = 1\text{Pa}$
- $\sigma$  positiv om drag,  $\sigma$  negativ om tryck



$$\sigma = \frac{F}{A}$$



## Normalspänning - Exempel

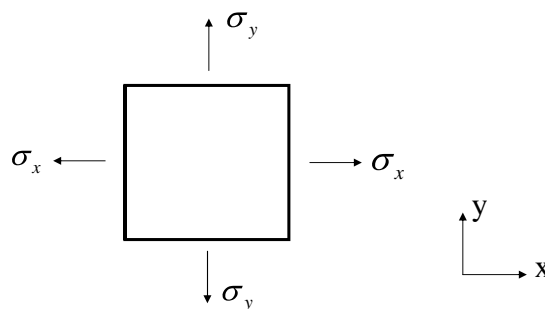


- Ett stolsben har tvärsnittsarean 2 cm x 2 cm.
- $F=800$  N. Beräkna  $\sigma$  och jämför med brottspänning för trä, ca. 50 MPa.



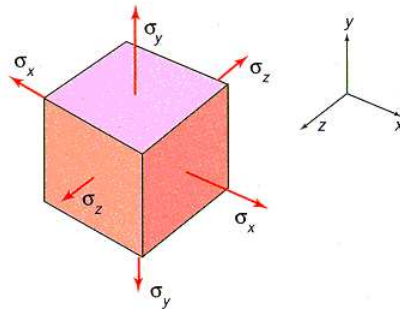
## Normalspänning

- Normalspänning i 2 dimensioner
  - 2 normalspänningskomponenter
  - $\sigma_x$  och  $\sigma_y$  anger spänning i x- och y-riktning.
  - Dragspänning positivt och tryckspänning negativt.



## Normalspänning

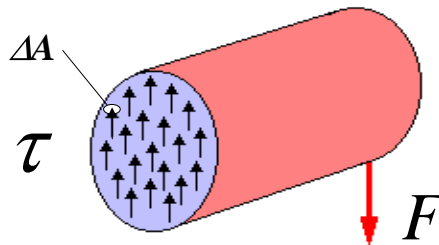
- Normalspänning i 3 dimensioner
  - 3 normalspänningskomponenter
  - $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  och  $\sigma_z$  anger spänning i x-, y- respektive z-riktning. Dragspänning positivt och tryckspänning negativt.



## Skjuvspänning

- Definition:

$$F = \sum \tau \Delta A$$

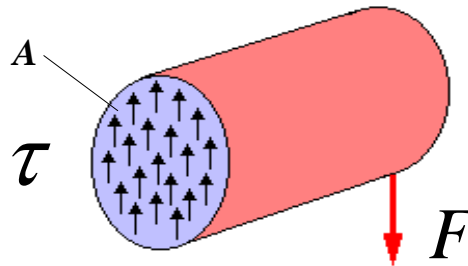




# Skjuvspänning

- Medelskjuvspänning:

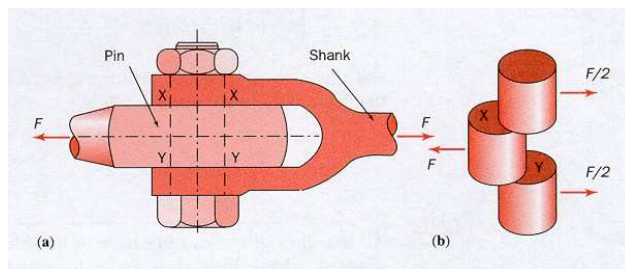
$$\tau = \frac{F}{A}$$



# Skjuvspänning - Exempel

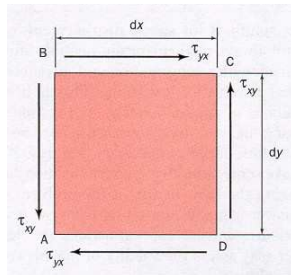
$$F = 2 \tau A$$

$$\tau = \frac{F}{2A}$$



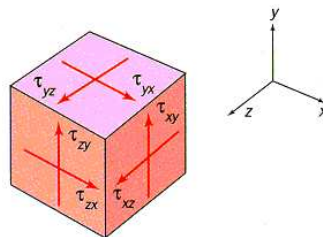
## Skjuvspänning

- Skjuvspänning i 2 dimensioner
- 2 komponenter:  $\tau_{xy}$  och  $\tau_{yx}$
- Parvis lika skjuvspänningar
- Momentjämvikt  $\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$

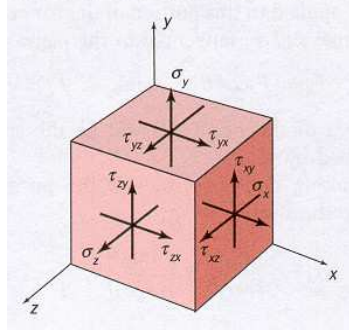


## Skjuvspänning

- Skjuvspänning i 3 dimensioner
  - 6 skjuvspänningskomponenter!
  - Betecknas med  $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$  och  $\tau_{zy}$
  - Första index anger normalriktning för planet, andra index skjuvspänningens riktning



## Spänningen i en punkt – 3D



$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$



## Töjning

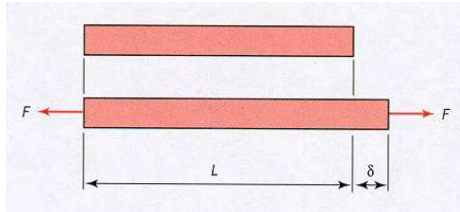
- Töjning är ett deformationsmått
- Töjningen beskriver deformationen hos en kropp
  
- Spänning är ett kraftmått, beskriver de inre krafterna hos en kropp



## Normaltöjning

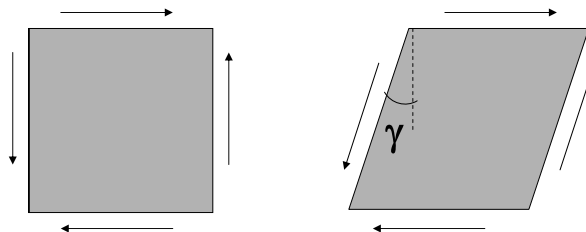
- **Normaltöjning = relativ längdändring**
  - Förlängning definieras som positiv töjning
  - Dimensionslös storhet
  - Beteckning:  $\varepsilon$
  - Medeltöjning:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$



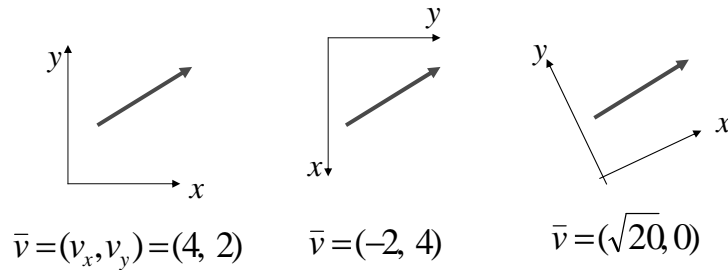
## Skjuvtöjning

- **Skjuvtöjning = ändring av från början rät vinkel**
  - Dimensionslös storhet
  - Beteckning:  $\gamma$



## Transformation av spänning

En vektor kan beskrivas i olika koordinatsystem:



Här fås maximalt värde på  $v_x$   
(vektorns längd) och  $v_y=0$ .

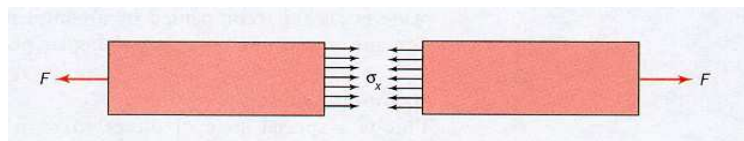


## Transformation av spänning

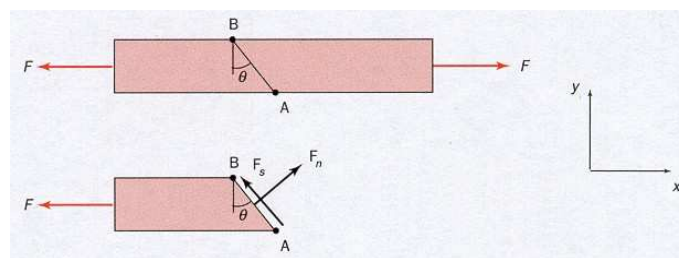
- Spänningstillståndet i en punkt är ingen vektor, men kan på liknande sätt beskrivas i olika koordinatsystem.
- Transformation av spänning - att bestämma spänningsvärdena i ett nytt koordinatsystem
- För en viss orientering på koordinatsystemet (huvudriktningar) fås maximala normalspänningar (huvudspänningar) och noll skjuvspänning.



## Tarnsformation av spänning Dragen stång



## Transformation av spänning Dragen stång



**Jämvikt vinkelrätt**

$$F_n - F \cos \theta = 0$$

$$F_n = F \cos \theta$$

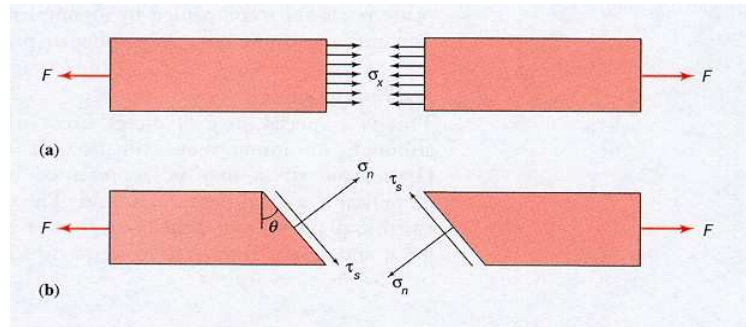
**Jämvikt parallellt**

$$F_s + F \sin \theta = 0$$

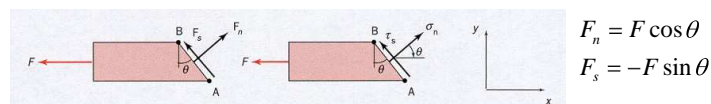
$$F_s = -F \sin \theta$$



## Transformation av spänning Dragen stång



## Transformation av spänning Dragen stång



$$F_n = F \cos \theta$$

$$F_s = -F \sin \theta$$

Spänning i x - riktning :

$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

Spänning i normalriktning :

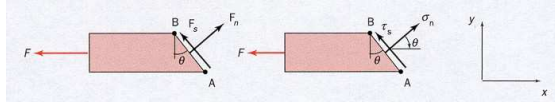
$$\sigma_n = \frac{F_n}{\left(\frac{A}{\cos \theta}\right)} = \frac{F \cos \theta}{\left(\frac{A}{\cos \theta}\right)} = \frac{F}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta$$

Spänning i tangenriktning :

$$\tau_s = \frac{F_s}{\left(\frac{A}{\cos \theta}\right)} = \frac{-F \sin \theta}{\left(\frac{A}{\cos \theta}\right)} = -\frac{F}{A} \sin \theta \cos \theta = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$



## Transformation av spänning Dragen stång



Spänning i x - riktning :

$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

Spänning i normalriktning :

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta$$

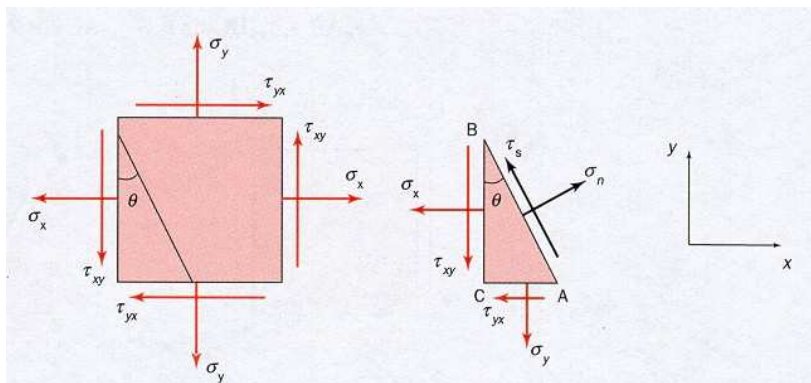
Spänning i tangenriktning :

$$\tau_s = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

Max för  $\theta = 0$   
Då är normalspänningen  
störst och  
skjuvspänningen = 0



## Transformation av spänning 2D



På liknande sätt kan  $\sigma_n$  och  $\tau_t$  bestämmas som funktion av  $\theta$  i 2D





## Huvudspänningar

- För en viss orientering på koordinatsystemet/snittytan får man max/min-värden på normalspänningarna
- Dessa spänningar kallas för huvudspänningar,  $\sigma_1$  och  $\sigma_2$
- Motsvarande riktningar kallas för huvudriktningar
- Huvudspänningarna  $\sigma_1$  och  $\sigma_2$  är vinkelräta
- Skjuvspänningen  $\tau_t=0$  för denna orientering
  
- Ger en bild av ”spänningsflödet uttryckt i drag och tryck”



## Huvudspänningar

- Varje kombination av normalspänningar och skjuvspänningar kan uttryckas i enbart normalspänningar:
- Huvudspänningar
- ForcePAD ritar huvudspänningar
- Blått=tryck, Rött=Drag



# Styvhet

- **Styvhet = ”Motstånd mot deformation”**
  - Motsats till flexibilitet – eftergivlighet
- **Material**
  - Elasticitetsmodul ( $N/m^2$ )
- **Form**
  - Geometri
- **Kraft**
  - Lina med dragkraft
  - Pekpinne

